ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. С. Дем'янчука

Р. М. Літнарович

Алгебра матриць

Курс лекцій

Рівне - 2007

УДК 516.1
Літнарович Р. М. Алгебра матриць.Курс лекцій. МЕГУ, Рівне, 2007,-112 с.

Рецензенти: В. О. Боровий, доктор технічних наук, професор
В. Г. Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є. С. Парняков, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Курс лекцій відповідає програмі Математики для студентів педагогічних факультетів вищих навчальних закладів

На основі даного курсу виконується самостійна науково – пошукова робота “ Дослідження точності апроксимації результатів психолого-педагогічного експерименту методом статистичних випробувань Монте Карло”

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

The course of lectures answers the program of Mathematics for the students of pedagogical faculties of higher educational establishments

On the basis of this course the independent is executed scientifically is searching work “ Research of exactness of approximation of results of psychology-pedagogical experiment by the method of statistical tests of Monte Karlo”

For students and graduate students of pedagogical faculties

Зміст

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Передмова

Майбутні педагоги повинні володіти необхідним математичним апаратом для постановки і обробки матеріалів педагогічних чи психологічних експериментів.

Знання алгебри матриць дає можливість рішати лінійні алгебраїчні рівняння для встановлення коефіцієнтів при виведенні формул функціонального зв'язку, при дослідженні рівня якості засвоюємого навчального матеріалу, від цілого ряду аспектів психологічного і педагогічного характеру.

Акцентується увага на комп'ютерному варіанті обробки результатів психолого-педагогічних експериментів в редакторі Microsoft Office Excel.

Приводиться ряд розроблених автором програм для програмованого мікрокалькулятора CITIZEN SRP – 350 SCIENTIFIC CALCULATOR , які дають змогу робити перевірку і саме виконання самостійних домашніх завдань і організувати проведення науково-дослідної роботи студентів, а також проводити самостійну науково-пошукову роботу аспірантам педагогічного напрямку навчання.

Може бути корисним для вчителів, учнів ліцеїв, коледжів, гімназій, старших класів середніх загальноосвітніх шкіл.

Лекція 1. Основні поняття теорії матриць

1.1. Коротка історична справка

Матриці вперше появилися в роботах англійських математиків У. Гамільтона (1821-1865) і А. Келі (1821-1895) а в наші часи широко використовуються у прикладній математиці і при проведенні досліджень у різних галузях наук, тому, що вони спрощують розгляд складних систем рівнянь.

В даному курсі розглядається теорія матриць з точки зору їх використання при обробці результатів психолого-педагогічних експериментів.

1.2. Поняття матриці

Матрицею називається прямокутна таблиця, складена із чисел або будь-яких других об'єктів. Ми будемо розглядати числові матриці, тобто матриці складені із чисел, наприклад

$$\begin{pmatrix} 2 & -1{,}3 & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}, \text{або} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ або } (5) \qquad (1.1)$$

При цьому круглі дужки по бокам – це знак матриці; використовуються також хвильові вертикальні лінії, але не прості вертикальні лінії, якими позначаються визначники. Як і у визначників, у матриць розглядають елементи, строчки і стовпчики.

Але вагомою відміною від визначників являється те, що визначник вважається рівним деякому числу, тоді як матриця не прирівнюється до будь-якого більш простого об'єкту. Її можна позначити однією буквою, наприклад **А, В** і т. і. , але і тоді під **А** все рівно будуть розуміти таблицю.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

В загальному вигляді:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Таким чином, елементи матриці зручно позначати двома індексами, із яких перший вказує номер строчки, а другий – номер стовпчика. Іноді коротко пишуть $A = (a_{ij})_{m,n}$, тобто i змінюється від 1 до m , a j-від 1 до n. Елемент матриці **A**, який стоїть на перетині ***i***-ої строчки і **j**-го стовпчика позначається символом $(A)_{ij} = a_{ij}$.

1.3. Розміри і порядок матриць

Кожна матриця має відповідні розміри, тобто кількість строчок і кількість стовпчиків; так в строчках виразів (1,1) і (1,2) виписані матриці відповідно розмірів 2x3, 3x3, 4x1, 1x1, m x n.

Якщо число строчок дорівнює числу стовпчиків, то матриця називається ***квадратною*** і тоді говорять про її ***порядок.***

Квадратна матриця першого порядку ототожнюється зі своїм єдиним елементом. Так, четверта матриця виразу (1.1) – це просто число 5.

Матриця, в якої всього один стовпчик, називається **стовпчиковою, або числовим вектором**.

Така матриця ототожнюється з вектором у числовому просторі. Так, третя матриця (1.1) – це вектор у E_4 з координатами 1; -2; 0; 3.

Матриця, в якої всі елементи рівні нулю, називаються ***нульовою*** і має вигляд:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

Матриця, в якої всього одна строчка, називається ***строчною*** і позначається

$$A = \{a_1 a_2 \dots a_n\} \qquad (1.4)$$

Якщо матриця **A** складається із одного стовпчика, то така матриця називається ***матрицею-стовпцем*** і має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Другий індекс в елементів матриці-стовпця опускається.

Для позначення матриць використовують великі букви латинського алфавіту або високі квадратні дужки, або круглі дужки, або подвійні прямі лінії, в середині яких записують всі елементи матриці.

1.4. Головна діагональ і слід матриці

Сукупність елементів a_{11}, a_{22}, a_{33} , … a_{nn} квадратної матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.6)$$

у яких співпадають два індекси, утворюють ***головну діагональ*** матриці **A**.

Сума елементів головної діагоналі матриці **A** називається **слідом** цієї матриці і записується так:

$$S_p(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,. \qquad (1.7)$$

1.5. Діагональна і скалярна матриці

Квадратна матриця, у якої елементи з неоднаковими індексами (тобто які не стоять на головній діагоналі) рівні нулю, має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \qquad (1.8)$$

І називається ***Діагональною.***

Якщо на діагоналі стоять елементи *а, в…,к*, то матриця позначається

$$diag\ (a, b, \ldots, k). \qquad (1.9)$$

Діагональна матриця, всі діагональні елементи якої однакові, називаються ***скалярною*** матицею

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}. \qquad (1.10)$$

1.6. Одинична і квазідіагональна матриці

Якщо в скалярній матриці елемент a дорівнює одиниці, то вона приймає вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = diag(1,\ 1,\ \ldots,\ 1). \qquad (1.11)$$

і називається ***одиничною*** матрицею.

Одиничну матрицю позначають буквою E або I.

Якщо матриця **A** порядка n має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}, \qquad (1.12)$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_r$ недіагональні квадратні матриці порядків $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$ відповідно (причому $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_r = n$), головні діагоналі яких складають головну діагональ всієї матриці **A**, а всі елементи, що не належать матриці $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_r$, рівні

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

нулю, то матриця **A** називається ***квазідіагональною*** матрицею і записується так

$$A=\left(A_1, A_2, \ldots, A_r\right). \qquad (1.13)$$

1.7. *Вироджена і невироджена матриці*

Визначник, що складається із елементів квадратної матриці, при такому ж їх розміщені, які в останній, ***називається визначником матриці.***

Матриця **A** називається ***виродженою***, якщо її визначник

$$D(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=0. \qquad (1.14)$$

Матриця **A** називається **не*виродженою***, якщо її визначник не дорівнює нулю, тобто

$$D(A)\neq 0. \qquad (1.15)$$

1.8. Транспонована матриця

Якщо в матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.16)$$

Замінити місцями строчки і стовпці, то отримаємо матрицю $\mathbf{A}^T$, яка називається ***транспонованою*** матрицею по відношенню до матриці **A**:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.17)$$

Тобто, матриця являється транспонованою по відношенню до матриці **A** , якщо вона отримана із матриці **A** перестановкою строчок і стовпців. Наприклад

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, залежність між елементами транспонованої і даної матриці така

$$(A^T)_{ік} = (A)_{кі}. \qquad (1.18)$$

В загальному вигляді можна написати

$$a_{ij}^T = a_{ji}. \qquad (1.19)$$

Чому? Ясно, що

$$(A^T)^T = A. \qquad (1.20)$$

1.9. Симетрична і кососиметрична матриці

Матриця, яка співпадає зі своєю транспонованою, називається ***симетричною***:

$$A^T = A. \qquad (1.21)$$

У симетричної матриці елементи, симетричні відносно головної діагоналі, рівні.

Такою може бути тільки ***квадратна*** матриця. Умову симетричності можна записати у вигляді

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (1.22)$$

Якщо

$$a_{ij} = -a_{ji}, \qquad (1.23)$$

то матриця називається **кососиметричною** і позначається **–К**. У кососиметричної матриці **К** на головній діагоналі стоять нулі, а елементи, симетричні відносно цієї діагоналі, відрізняються тільки знаками

$$K^T = -K. \qquad (1.24)$$

1.10. Квадратна матриця

Матриця розміру n x n називається ***квадратною матрицею порядку n***. Квадратна матриця

$$A \equiv [a_{ik}] \qquad (1.25)$$

називається

- ***трикутною (наддіагональною)***, якщо із $i > k$ слідує

$$a_{ik} = 0;$$

– ***строго трикутною***, якщо із $i \geq k$ слідує

$$a_{ik} = 0,$$

– ***мономіальною,*** якщо в кожній її строчці і в кожному стовпці є лише один відмінний від нуля елемент.

Практичне заняття **1**. Основні поняття теорії матриць

Задача 1. Визначити слід матриці

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 25{,}6 & 68{,}26 & 188{,}218 \\ 25{,}6 & 68{,}26 & 188{,}218 & 533{,}1862 \\ 68{,}26 & 188{,}218 & 533{,}1862 & 1543{,}207 \\ 188{,}218 & 533{,}1862 & 1543{,}207 & 4543{,}4051 \end{pmatrix}.$$

Рішення.

Sp(A)=10+68,26+533,1862+4543,4051=5154,8513.

Задача 2. Дослідити вид цієї матриці.

Рішення.

1. Матриця являється квадратною розмірами 4x4.
2. Матриця є симетрична відносно діагональних елементів. Умова симетричності $a_{ij} = a_{ji}$.
3. Елементами симетричної матриці є: $a_{12} = 25{,}6$; $a_{21} = 25{,}6$; $a_{13} = 68{,}26$; $a_{31} = 68{,}26$; $a_{14} = 188{,}218$; $a_{41} = 188{,}218$; $a_{43} = 1543{,}207$; $a_{34} = 1543{,}207$; $a_{42} = 533{,}1862$; $a_{24} = 533{,}1862$; $a_{32} = 188{,}218$; $a_{23} = 188{,}218$.

Задача 3. Транспонувати матрицю **A**.

Рішення.

В загальному вигляді для матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Транспонована матриця буде

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

І в нашому випадку

$$A^T = \begin{pmatrix} 10 & 25{,}6 & 68{,}26 & 188{,}218 \\ 25{,}6 & 68{,}26 & 188{,}218 & 533{,}1862 \\ 68{,}26 & 188{,}218 & 533{,}1862 & 1543{,}207 \\ 188{,}218 & 533{,}1862 & 1543{,}207 & 4543{,}4051 \end{pmatrix}.$$

При транспонуванні діагональні елементи не змінюють свого положення, а строчки стають рядками.

Матриця, яка співпадає зі своєю транспонованою називається симетричною.

Таким чином, ми доказали симетричність нашої матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Задача 4. Дослідити матрицю на невиродженість.

Рішення.

Матриця **A** називається невиродженою якщо її визначник не дорівнює нулю.

Визначник четвертого порядку вичисляється за формулою (при його розкладі по елементам першої строчки)

$$\begin{vmatrix} a_1 & \text{в}_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & \text{в} & c_2 & d_2 \\ a_3 & \text{в}_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & \text{в}_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} \text{в}_2 & c_2 & d_2 \\ \text{в}_3 & c_3 & d_3 \\ \text{в}_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \text{в}_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$+c_1\begin{vmatrix} a_2 & в_2 & d_2 \\ a_3 & в_3 & d_3 \\ a_4 & в_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \\ a_4 & в_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(в_2c_3 - c_2в_3) - в_1(a_2c_3 - c_2a_3) +$$

$$+c_1(a_2в_3 - в_2a_3),$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} в_2 & c_2 \\ в_3 & c_3 \end{vmatrix} - в_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & в_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Запишемо визначник четвертого порядку у вигляді

$$D = a_1A_1 + в_1B_1 + c_1C_1 + d_1D_1,$$

Де

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \qquad B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & в_2 & d_2 \\ a_3 & в_3 & d_3 \\ a_4 & в_4 & d_4 \end{vmatrix}, \qquad C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & в_2 & d_2 \\ a_3 & в_3 & d_3 \\ a_4 & в_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

і в нашому випадку

$$A_1 = \begin{vmatrix} 68,26 & 188,218 & 533,1862 \\ 188,218 & 533,1862 & 1543,207 \\ 533,1862 & 1543,207 & 4543,4051 \end{vmatrix} = 3080,103514$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} 25,6 & 188,218 & 533,1862 \\ 68,26 & 533,1862 & 1543,207 \\ 188,218 & 1543,207 & 4543,4051 \end{vmatrix} = -3953,107659,$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} 25,6 & 68,26 & 533,1862 \\ 68,26 & 188,218 & 1543,207 \\ 188,218 & 533,1862 & 4543,4051 \end{vmatrix} = 1639,866984,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 25,6 & 68,26 & 188,218 \\ 68,26 & 188,218 & 533,1862 \\ 188,218 & 533,1862 & 1543,207 \end{vmatrix} = -220,6808901.$$

Підставляючи отримані дані в загальну формулу, отримаємо

D=10 · 3080,103514 - 25,6 · 3953,107659 + 68,26 · 1639,866984 - 188,218 · 220,6808901=30801,03514 - 101199,5561 + + 111937,3203 – 41536,11577 = 2,68357.

Висновок: Матриця невироджена

Задача 5. Для визначення двох перших ваг зрівноважених елементів необхідно в матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь А поміняти строчки і самі коефіцієнти в строчках так, щоб перша строчка була четвертою, а друга третьою. Дослідити дану матрицю на невиродженість і знайти її слід.

Рішення. В нашому випадку

$$A' = \begin{pmatrix} 4543,4051 & 1543,207 & 533,1862 & 188,218 \\ 1543,207 & 533,1862 & 188,218 & 68,26 \\ 533,1862 & 188,218 & 68,26 & 26,6 \\ 188,218 & 68,26 & 25,6 & 10 \end{pmatrix}.$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Слід цієї матриці

$$Sp(A') = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 4543{,}4051 + 533{,}1862 +$$
$$+ 68{,}26 + 10 = 5154{,}8513$$

Алгебраїчні доповнення будуть

$$A_1 = \begin{vmatrix} 533{,}1862 & 188{,}218 & 68{,}26 \\ 188{,}218 & 68{,}26 & 25{,}6 \\ 68{,}26 & 25{,}6 & 10 \end{vmatrix} = 16{,}655688$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} 1543{,}207 & 188{,}218 & 68{,}26 \\ 533{,}1862 & 68{,}26 & 25{,}6 \\ 188{,}218 & 25{,}6 & 10 \end{vmatrix} = 288{,}6066194$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1543{,}207 & 533{,}1862 & 68{,}26 \\ 533{,}1862 & 188{,}218 & 25{,}6 \\ 188{,}218 & 68{,}26 & 10 \end{vmatrix} = 288{,}6066194$$

$$D_1 = -\begin{vmatrix} 1543{,}207 & 533{,}1862 & 188{,}218 \\ 533{,}1862 & 188{,}218 & 68{,}26 \\ 188{,}218 & 68{,}26 & 25{,}6 \end{vmatrix} = -220{,}6808907.$$

Підставляючи дані результати в загальну формулу, отримаємо D=4543,4051· 16,655688 - 1543,207· 121,8344688 + 533,1862 · 288,6066194 - 188,218 · 220,6808901 = 2,683629658.

Раніше отримали D = 2,68357.

Лекція 2. Алгебраїчні операції над матрицями

2.1. Лінійні дії з матрицями

Дві матриці однакового порядку **A** і **B** називаються рівними, якщо рівні їх відповідні елементи.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \text{ при умові } (A)_{i\kappa} = (B)_{i\kappa}, \qquad (2.1)$$

або $$a_{ік} = в_{ік} \quad (i, к = 1,2,\ldots,n). \qquad (2.2)$$

Додавати або віднімати можна лише матриці, які мають однакове число строчок і стовпців.

Сумою A+B матриць A і B називається така матриця C, всі елементи якої являються сумами відповідних елементів матриць A і B.

Матриці однакового розміру складаються за формулою

$$\mathbf{C = A + B}, \qquad (2.3)$$

при умові

$$(C)_{ік} = (A)_{ік} + (B)_{ік}, \qquad (2.4)$$

або

$$c_{ік} = a_{ік} + в_{ік}. \qquad (2.5)$$

Якщо $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad (2.6)$$

$$B = \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

то

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + в_{11} & a_{12} + в_{12} & a_{13} + в_{13} \\ a_{21} + в_{21} & a_{22} + в_{22} & a_{23} + в_{23} \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Суму матриць розуміють в алгебраїчному понятті.

Додавання матриць має обернену дію - віднімання, яке, також, здійснюється поелементо, наприклад

$$A = (a_{ік}), \quad B = (в_{ік}),$$

і $$A - B = C, \qquad (2.9)$$

то $$C_{ік} = a_{ік} - в_{ік} \qquad (2.10)$$

Приклад 1. Скласти матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рішення. Маємо

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-6) \\ -3+7 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Поняття суми матриць поширюється на будь-яке число матриць.

Сума матриць підпорядковується сполучному закону

$$A + B = B + A \tag{2.11}$$

і переставному закону

$$(A + B) + C = A + (B + C). \tag{2.12}$$

Нарешті, третя властивість суми матриць

$$A + 0 = A, \tag{2.13}$$

де 0 - нульова матриця.

Добутком матриці А на скаляр λ називається матриця В, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці А на скаляр λ

$$\mathbf{в}_{ік} = \mathbf{a}_{ік} \cdot \lambda \,. \tag{2.14}$$

Таким чином

$$A\lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \lambda$$

Або

$$A\lambda = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda & \dots & a_{1n}\lambda \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & \dots & в_{1n} \\ в_{21} & в_{22} & \dots & в_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ в_{n1} & в_{n2} & \dots & в_{nn} \end{pmatrix} = B. \tag{2.15}$$

Добуток матриць на скаляр (число) підпорядковується слідуючим законам:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \tag{2.16}$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \tag{2.17}$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \tag{2.18}$$

де λ і μ - скаляри (числа).

Приклад 2. Знайти добуток матриці A = $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$ на число 4.

Рішення. Маємо

$$4A = \begin{pmatrix} 4\cdot(-4) & 4\cdot 7 \\ 4\cdot 5 & 4\cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 28 \\ 20 & 44 \end{pmatrix}.$$

Операція транспонування (перестановка строчок стовпцями) має слідуючі властивості

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \tag{2.19}$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T, \tag{2.20}$$

$$(A^T)^T = A. \tag{2.21}$$

Очевидна формула

$$\det(\lambda C) = \lambda^n \det C, \tag{2.22}$$

де **n** - порядок квадратної матриці **C**.

При цьому, взагалі говорячи,

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B. \tag{2.23}$$

2.2. Множення матриць

Перш за все, перемножати можна не всякі матриці, а тільки такі, в яких число стовпців першого множника дорівнює числу строчок другого множника, тобто ширина першого множника повинна дорівнювати висоті другого, в противному випадку множення не можливе. Якщо ця умова виконується, то добуток знаходиться по слідуючому правилу

$$\underset{2x3}{C} = \underset{2x2}{A} \cdot \underset{2x3}{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \end{pmatrix}, \text{ або}$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}в_{11} + a_{12}в_{21} & a_{11}в_{12} + a_{12}в_{22} & a_{11}в_{13} + a_{12}в_{23} \\ a_{21}в_{11} + a_{22}в_{21} & a_{21}в_{12} + a_{22}в_{22} & a_{21}в_{13} + a_{22}в_{23} \end{pmatrix}. \qquad (2.24)$$

Необхідно уважно продумати це правило. наприклад, щоб отримати в добутку елемент, який стоїть в першій строчці і в третьому стовпці, потрібно у першого множника взяти першу строчку, у другого - третій стовпчик, а після цю строчку і стовпчик як би скалярно перемножити. І другі елементи матриці - добутку отримують за допомогою “як би скалярного множення” строчок першої матриці - множника.

В загальному випадку, якщо ми помножимо матрицю (a_{ij}) розміру mxn. на матрицю $в_{ij}$ розміру nxp, ми отримаємо матрицю (c_{ij}) розміру mxp, елементи якої обчислюються за формулою

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}в_{kj}\ , \qquad (2.25)$$

де (i, j=1, 2, …, n),
або

$$(C_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (B)_{kj}\,. \qquad (2.26)$$

Із приведеного правила витікає, що завжди можна перемножати дві квадратні матриці однакового порядку, що дасть квадратну матрицю такого ж порядку. В окремому випадку квадратну матрицю завжди можна помножити саму на себе, тобто піднести до квадрату, тоді як прямокутну не квадратну матрицю піднести до квадрату неможливо.

Другим важливим частковим випадком являється множення строчної матриці на стовпчикову, причому ширина першої рівна висоті другої; це дасть квадратну матрицю першого порядку, тобто число

$$(a_1\ a_2\ a_3)\cdot\begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix} = a_1 в_1 + a_2 в_2 + a_3 в_3. \qquad (2.27)$$

Добуток матриць підпорядковується слідуючим законам

$$(AB)\cdot D=A\cdot(BD), \qquad (2.28)$$

$$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B), \qquad (2.29)$$

$$(A+B)C=AC+BC, \qquad (2.30)$$

$$C(A+B)=CA+CB. \qquad (2.31)$$

При цьому завжди мається на увазі, що розміри матриць забезпечують осмисленість формули.

Переставляти місцями співмножники не можна, тому що добуток матриць може залежати від порядку співмножників, тобто в загальному випадку

$$A\cdot B\neq B\cdot A, \qquad (2.32)$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ а\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{або}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}=-4;\quad а\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};\ \text{або}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix};\quad а\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\ \text{Не має смислу.}$$

В деяких випадках має місце рівність

$$A\cdot B=B\cdot A \qquad (2.33)$$

Такі матриці **А** і **В** називаються ***комутативними*** або (***переставновними***).

Наприклад, не залежить від порядку співмножників добутку двох діагональних матриць, добуток матриці на число, добуток матриці на одиничну матрицю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{21} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} в_{11} & & & 0 \\ & в_{12} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & в_{1n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} в_{11} & & & 0 \\ & в_{12} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & в_{1n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{12} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \lambda;$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Як видно із останньої рівності, множення матриці на одиничну матрицю не змінює результат, тобто

$$AE=EA=A \qquad (2.34)$$

Приклад. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рішення. Маємо

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 4 + 7\cdot 5 & 1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 7\cdot 6 & 1\cdot 3 + 3\cdot 8 + 7\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 6\cdot 4 + 1\cdot 5 & 4\cdot 0 + 6\cdot 1 + 1\cdot 6 & 4\cdot 3 + 6\cdot 8 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot 5 & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 6 & 0\cdot 3 + (-1)\cdot 8 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 48 & 45 & 48 \\ 33 & 12 & 63 \\ 6 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

При множенні матриць необхідно уважно слідкувати за порядком множників; для цього користуються термінами "помножимо **A** справа на **B**" або просто "помножимо **A** на **B**" (отримаємо **AB**), але "помножимо **A** зліва на **B**" (отримаємо **BA**).

Відмітимо ще одну властивість:

$$(AB)^T = B^T A^T. \qquad (2.35)$$

І властивість

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \qquad (2.36)$$

Якщо **A** комплексна числова матриця, то під A^T розуміється результат транспонування з одночасною заміною всіх елементів на їх комплексно спряжені значення; при цьому A^T називається матрицею, спряженою з **A** . для комплексних матриць із приведених вище формул необхідно замінити лише дві

$$\det A^T = (\det A)^T, \qquad (2.37)$$

$$(\lambda A)^T = \lambda^T A^T. \qquad (2.38)$$

2.3. Піднесення до степеня

Для квадратної матриці справедлива дія піднесення до степеня

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \quad \text{співмножників}} . \qquad (2.39)$$

При цьому

$$A^2 = A \cdot A, \qquad (2.40)$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2, \qquad (2.41)$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A^2 \cdot A^2 = A \cdot A^3, \qquad (2.42)$$

....

Будь-яка ціла додатня степінь **m** визначається рівністю

$$A^m = A^{m-1} \cdot A \qquad (m \geq 2). \qquad (2.43)$$

Якщо $[a_1\ a_2, \ldots, a_n)$ - діагональна матриця то

$$A^m = \left[a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m\right] \qquad (2.44)$$

Приклад знайти A^2, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Рішення. Маємо $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно вичисляється степінь квазідіагональних матриць. Якщо

$$A=\left[A_1,A_2,\dots,A_r\right],\ \text{то}\ A^m=\left[A_1^m,A_2^m\dots,A_r^m\right] \qquad (2.45)$$

Під нульовою степінню матриці **A** мається на увазі одинична матриця того ж порядку

$$A^0=E. \qquad (2.46)$$

Практичне заняття 2.
Лінійні дії з матрицями, транспонування

Задача 1. Нехай

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & -6\end{pmatrix}.\ \text{Знайти}$$

$$C=A+B+A^T+B^T.$$

Рішення. Користуючись сполучним законом і законом переміщення матриць

A+B=B+A

(A+B)+C=A+(B+C),

маємо

$$C=A+B+A^T+B^T=(A+A^T)+(B+B^T),$$

але

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -4\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -4 & -6\end{pmatrix},$$

тому

$$A+A^T=\begin{pmatrix}1+1 & 2-3\\ -3+2 & -4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -8\end{pmatrix},$$

$$B+B^T=\begin{pmatrix}2+2 & -4-1\\ 5-1 & -6-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 1 & -12\end{pmatrix},$$

і

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця **С** представляє приклад діагональної матриці другого порядку.

Задача 2. Показати, що матриця S=3A-2B - симетрична, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Рішення маємо

$$\mathrm{S = 3A - 2B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 9 & 9 & 18 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -6 & 2 & -8 \\ -10 & 16 & -10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+8 & -3+6 & 6-10 \\ 9-6 & 9+2 & 18-8 \\ 6-10 & -6+16 & 12-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -4 \\ 3 & 11 & 10 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, що отримана матриця **S** симетрична, тому що вона не змінюється при транспонуванні.

Задача 3. Показати, що матриця К=2А-В кососиметрична, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 11 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Рішення. Маємо

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$K = 2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 4 & 4 & 10 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 11 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2 & 6-4 & -2-(-5) \\ 4-6 & 4-4 & 10-5 \\ 8-11 & -2-3 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як

$$K^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = -K,$$

то матриця **К** являється косиметричною.

Задача 4. Доказати, що для будь-якої матриці **A** матриця $S = A + A^T$ - симетрична.

Рішення. Приміняючи властивості транспонування (2.19)

$(A+B)^T = A^T + B^T$, (2.20) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, (2.21)

$(A^T)^T = A$, отримаємо рівність

$$S^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = S,$$

Тобто **S** симетрична матриця.

Задача 5. Показати, що для матриці n-го порядку **A** виконується рівність $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

Рішення. При множенні матриці **A** на число **λ** всі її елементи множаться на **λ.** Винісши цей множник із кожної строчки за знак визначника, згідно правилу, що множення всіх елементів будь-якого стовпчика (строчки) визначника на одне і те ж число **λ** рівносильно множенню на **λ** визначника, отримає

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|.$$

Задача 6. Знайти C=2A+3B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $$C = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Знайти матрицю C=A-5B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $$\begin{pmatrix} 26 & -21 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Знайти матрицю A=2C-3D, якщо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $$C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 12 \\ 0 & -10 & 1 \\ 11 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Показати, що матриця K=B-D - кососиметрична, якщо

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$B=\begin{pmatrix} a & в & c \\ c & в & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad D=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ в+c & в & 0 \\ 1+c & 1+a & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Показати, що матриця $B = A + D - D^T$ буде нульовою матрицею, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & в^2-c \\ 1-a^2 & c-в^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & в & c \\ a^2 & в^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. Показати, що для любої матриці **A** матриця $K = A - A^T$ - кососиметрична.
Вказівка: Див. задачу 4.

Задача 12. Дана довільна матриця **A**. Показати, що вона може бути представлена у вигляді суми симетричної і кососиметричної матриць.

Вказівка: Розглянути матриці $S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ і $K = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$.

Задача 13.Виписати загальний вигляд симетричної і кососиметричної матриць другого і третього порядку. Знайти їх визначники.
Відповідь:

$$1)\begin{pmatrix} a & в \\ в & c \end{pmatrix}, 2)\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, 3)\begin{pmatrix} a & в & c \\ в & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, 4)\begin{pmatrix} 0 & a & в \\ -a & 0 & c \\ -в & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Практичне заняття 3. Множення матриць.

Добуток матриці **A** на матрицю **B** (того ж порядку) визначається слідуючим чином: для того, щоб отримати елемент C_{ij} матриці-добутку C=AB, необхідно елементи i-ї строчки матриці **A** помножити на відповідні елементи j-го стовпця

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} в_{ki} = a_{i1} в_{1j} + a_{i2} в_{2j} + \ldots + a_{in} в_{nj},$$

де C_{ij} - добуток i-ї строчки матриці **A** на j-й стовпчик матриці **B** .

Властивості

1) (AB)C = A(BC),

2) A(λB)=(λA)B=λ(AB),

3) (A+B)C=AC+BC,

4) C(AB)=CA+CB,

5) AE=EA=A,

6) AO=OA=O,

7) $(AB)^T = B^T A^T$,

8) $|AB| = |A| \cdot |B|$.

В загальному випадку **AB≠BA**, тобто множення матриць не має комутативної властивості, тому завжди необхідно строго слідкувати за порядком множників.

Матриці називаються перестановними ,для яких **AB=BA**.

Задача 1. Знайти добуток строчки $(3\ \ -5\ \ 4)$ на стовпець

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Рішення. Необхідно перемножити відповідні елементи і скласти результати:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -8.$$

Задача 2. Знайти добуток **AB** і **BA** матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Встановити, що матриці **A** і **B** непереставновні.

Рішення. Нехай C=AB. Щоб знайти елемент C_{11}, необхідно помножити першу строчку матриці **A** на перший стовпчик **B**:

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$$

Елемент C_{12} добутку **AB** знаходиться множенням першої строчки **A** на другий стовпчик **B**:

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 6.$$

Аналогічно множимо другу строчку **A** на стовпці **B**, маємо:

$$C_{21} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 4 = 8;$$

$$C_{22} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 12.$$

Таким чином, $C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$. Тепер множимо строчки **B** на стовпці **A**, отримуємо

$$BA = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так як AB≠BA, то дані матриці неперестановні.

Задача 3. Знайти добуток **AB** даних матриць третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Рівняння. Множимо по черзі строчки матриці **A** на стовпці **B**

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \\ -2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & -2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & -2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Знайти всі матриці, перестановні з

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Рішення. Нехай $X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ - шукана матриця, тоді

$$AX=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}, \qquad XA=\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & \gamma\end{pmatrix}$$

і рівність AX=XA справедлива тоді і тільки тоді, коли γ=β, δ=ά.

Таким чином, загальний вигляд матриці переставної з даною матрицею **А** слідуючий:

$$X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\alpha E+\beta A.$$

Задача 5. Показати, що добуток матриці **А** на транспоновану завжди буде симетричною матрицею.

Задача 6. Матриця **А** називається ***ортогональною*** якщо виконується умова $AA^T=E$, або $A^T=A^{-1}$.

Доказати, що матриця А ортогональна, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & -2/3\\ -2/3 & 1/3 & -2/3\\ -2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Рішення. Із симетричності матриці **А** слідує, що $A=A^T$, тому

$$AA^T = A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 7. Виконати множення квадратних матриць

Відповідь:

$$а)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -14 & 19 \\ -28 & 37 \end{pmatrix},$$

$$б)\begin{pmatrix} a & в \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -в & d \\ a & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & ad - вc \\ ad - вc & 0 \end{pmatrix},$$

$$в)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 29 & 4 & 27 \\ 17 & 14 & 19 \\ 14 & -5 & 11 \end{pmatrix},$$

$$г)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 11 & 2 & 12 \\ -1 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Показати, що матриці **A** і **B** перестановні, якщо

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 9. Знайти матрицю C=AB-BA, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$C=\begin{pmatrix}-28 & 61 & -32\\ -14 & 46 & -19\\ -12 & 34 & -18\end{pmatrix}.$$

Задача 10. Показати, що матриці

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

переставновні. Знайти їх добуток.

Задача 11. Знайти всі матриці, переставновні з даними.

Відповідь:

$$а)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}a & в\\ -в & a\end{pmatrix},$$

$$б)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & в & c\\ 0 & 0 & в\end{pmatrix},$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$в)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & в & c & d \\ 0 & a & в & c \\ 0 & 0 & a & в \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Де ***a, в, c, d*** – довільні числа.

Задача 12. Знайти загальний вигляд матриці **А** третього порядку, для якої

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = 0, \qquad \text{відповідь:} \quad A = \begin{pmatrix} a & в & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 13. Ненульові матриці **А** і **В** для яких **АВ = 0** називаються **дільниками нуля**. Показати, що визначник хоча б в одній із цих матриць дорівнює нулю.

Вказівник. Використати властивість множення матриць

$$A0 = 0A = 0,$$

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Задача 14. Показати на прикладі матриць другого порядку, що рівність АВ - ВА = Е неможлива.

Практичне заняття 4. Степені матриць. Многочлени від матриць.

Ціла невід’ємна степінь матриці визначається рівністю

$$A^P = \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{P \quad раз} = A^{P-1} \cdot A = A \cdot A^{P-1} \qquad і \qquad A^o = E$$

Для добутку степенів матриць справедлива рівність

$$A^P \cdot A^q = A^q \cdot A^P = A^{P+q} \qquad (P,\, q = 0,\, 1,\, 2\ldots).$$

Якщо даний многочлен

$$P(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \ldots + a_{m-1} A + a_m E\ ,$$

то всякі два многочлени від матриці **A** перестановні:

$$\mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{Q(A)} = \cdot\, \mathrm{Q(A)} \cdot \mathrm{P(A)}.$$

Якщо P(A) = 0 (нульова матриця), то матриця **A** називається коренем многочлена.

Задача 1. Знайти A^n для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рішення. Знаходимо послідовно добутки за формулою (2.24)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і т. і.

Продовжуючи множення, прийдемо до формули

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Матриця $P = (P_{ij})$, у якої всі елементи невід'ємні $(P_{ij} \geq 0)$, а сума елементів кожної строчки дорівнює одиниці, тобто $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \;\; (i = 1,2,\ldots,n)$, називається матрицею ***перехідних ймовірностей***, або

стохастичною матрицею. Знайти P^2 і **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** стохастичної матриці

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Рішення. Знаходимо P^2 і **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** (попередньо за знак матриці виноситься загальний множник $\frac{1}{6}$):

$$P^2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & 18 & 18 \\ 6 & 9 & 21 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & 18 & 18 \\ 6 & 9 & 21 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 36 & 54 & 126 \\ 42 & 63 & 111 \\ 32 & 84 & 100 \end{pmatrix}.$$

Замітимо, що матриці P^2 і **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** також являються стохастичними матрицями; взагалі можна показати, що будь-яка степінь стохастичної матриці також являється стохастичною матрицею.

Задача 3. Знайти всі степені матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Рішення. Маємо $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

Значить $A^4 = A^5 = 0.$

Ненульова матриця **A**, для якої $A^{\ell} = 0$ при деякому значенні ℓ, називається ***нильпотентною***.

Найменше із чисел ℓ для яких $A^{\ell} = 0$, називається показниками (індексом) нильпотентності. В нашому прикладі ℓ=3.

Задача 4. Знайти многочлен від матриці **A**, якщо $f(x) = X^2 - 3X + 5$, а $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Рішення. Шукана матриця $f(A)$ визначається рівністю

$$f(A) = A^2 - 3A + 5E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Показати, що матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ - корінь многочлена $P(x) = X^2 - 5X + 3.$

Рішення. Ма

$$P(A)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & -5\\ -15 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & -5\\ -15 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0,$$

тобто **A** є корінь многочлена $\boldsymbol{P(x)}$.

Задача 6. Знайти A^3 для слідуючих матриць:

Відповідь:

$a) A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 63 & 64\end{pmatrix}$

$б) A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad \begin{pmatrix}-29 & 20\\ 10 & -39\end{pmatrix}$,

$в) A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. $A^2=\begin{pmatrix}7 & 4 & 4\\ 9 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$. $\qquad \begin{pmatrix}26 & 15 & 15\\ 30 & 16 & 15\\ 15 & 10 & 11\end{pmatrix}$.

Задача 7. Знайти всі степені матриць $j_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ і

$T=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Відповідь: $j_1^{4m}=E$.

Задача 8. Матриця **A** Називається ***інволютивною***, якщо $A^2=E$; ***демпотентною*** , якщо $A^2=A$. Знайти загальний вигляд інволютивної і демпотентної матриці другого порядку.

Відповідь: $\pm E$ або $\begin{pmatrix} a & в \\ \dfrac{1-a^2}{в} & -a \end{pmatrix}$, або $\begin{pmatrix} \pm 1 & o \\ C & \pm 1 \end{pmatrix}$;

О або **Е**, або $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2в \\ \dfrac{1}{2в} & 1 \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} a & в \\ \dfrac{a(1-a)}{в} & 1-a \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}$, або $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Знайти P(A),

Якщо: Відповідь:

$a) P(x) = X^2 - X - 3$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$,

$б) P(x) = X^2 - 2X + 1$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$в)\, P(x) = X^3 - 7x^2 + 13x - 5\,; \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Знайти загальний вигляд матриць другого порядку, квадрат яких дорівнює нульовій матриці, тобто $A^2 = 0$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} a & в \\ c & -a \end{pmatrix}$, $де\, в\, c = -a^2$.

Задача 11. Знайти всі матриці **A** другого порядку, квадрат яких дорівнює діагональній матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & в \end{pmatrix}$, $a \neq в$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{в} \end{pmatrix}$.

Задача 12. Знайти умову, при якій матриця **A** другого порядку перестановна зі всіма матрицями другого порядку.
Відповідь: $A = \lambda E$.

Задача 13. Яким умовам повинні задовольняти елементи матриці **A** другого порядку, для того , щоб вона була перестановною зі всіма діагональними матрицями того ж порядку.
Відповідь: **A** повинна бути діагональною матрицею.

Лекція 3. Обернена матриця.

Будемо розглядати квадратні матриці деякого визначеного, наприклад, третього порядку.

При множенні таких матриць одинична матриця **Е** грає таку ж роль, що і одиниця при множенні чисел: легко безпосередньо перевірити, що

$$A \cdot E = EA + A \tag{3.1}$$

Для любої матриці **А**.

По аналогії з множенням чисел визначається і поняття оберненої до **А** матриці: це матриця A^{-1}, для якої

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{3.2}$$

Звідки і із рівності

$$det(AB) = detA \cdot detB \tag{3.3}$$

Витікає, що

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det E = 1 \tag{3.4}$$

тобто

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}. \tag{3.5}$$

Ми бачимо, що обов'язково повинно бути

$$\det A \neq 0\,. \tag{3.6}$$

Квадратна матриця **А**, для якої detA=0 називається виродженою. Таким чином, вироджена матриця на має оберненої. В той же час всяка невироджена матриця має обернення. Насправді, розглянемо будь-яку невироджену матрицю

$$K = \begin{pmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Тоді, виходить із визначення матриць, легко перевірити, що добуток зліва або справа на матрицю

$$\frac{1}{\det K}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

дорівнює **E**; де великими буквами $A_{1,\ldots}C_1$ позначені алгебраїчні доповнення відповідних елементів в матриці **K** (або, що те ж саме у відповідному визначнику). Значить, матриця (3.8) і є K^{-1}.

Обернені матриці застосовуються при рішенні матричних рівнянь. Наприклад, розглянемо рівняння

$$AX = B, \tag{3.9}$$

де **A** і **B** задані матриці, а **X** – шукана, причому $\det A \neq 0$. Помноживши обидві частини зліва на A^{-1} і скориставшись рівностями (3.2), отримаємо

$$X = A^{-1}B \tag{3.10}$$

Аналогічно із рівняння

$$XA = B \tag{3.11}$$

отримуємо рішення

$$X = B \cdot A^{-1}. \tag{3.12}$$

Матриці дають можливість коротко записати систему рівнянь першої степені. Наприклад, систему рівнянь

$$\begin{aligned} a_1x + в_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + в_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + в_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned} \tag{3.13}$$

можна переписати в матричній формі

$$\begin{pmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Якщо позначити матрицю коефіцієнтів буквою **A**, стовпчик (тобто числовий вектор) невідомих буквою **X**, а стовпчик вільних членів буквою d, то те ж рівняння можна ще коротше записати у вигляді

$$Ax = d, \tag{3.15}$$

звідки при $\det A \neq 0$ зразу отримуємо рішення

$$X = A^{-1}d, \qquad (3.16)$$

Звичайно, якщо детально розшифрувати цю формулу, отримаємо те ж саме правило Крамера. Відмітимо, що запис (3.15) можливий і у випадку, коли число рівнянь не дорівнює числу невідомих, тоді матриця **A** не буде квадратною; але при цьому не можна перейти до формули (3.16), тому що неквадратна матриця не має оберненої.

Із формули (3.7) видно, що матриці A і A^{-1} являються взаємно оберненими, тобто

$$(A^{-1})^{-1} = A. \qquad (3.17)$$

Крім цього іноді застосовується формула

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (\det A \neq 0, \det B \neq 0), \qquad (3.18)$$

яку легко перевірити

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B, \text{ або}$$

$$B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E. \qquad (3.19)$$

На кінець, із формули

$$(AB)^T = A^T B^T, \qquad (3.20)$$

якщо підставити $B = A^{-1}$, витікає, що

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E, \qquad (3.21)$$

тобто

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}. \qquad (3.22)$$

Замітимо, що в матричній алгебрі немає ділення, але із виразу

$$A^{-1}A = E, \qquad (3.23)$$

лише в умовному запису

$$A^{-1} \frac{E}{A}. \qquad (3.24)$$

Остання рівність оправдовує назву оберненої матриці.

Таким чином, матриця, яка являється рішенням рівняння

$$AX = E \qquad (3.25)$$

називають оберненого матрицею до матриці **A** і позначають A^{-1}. Обернена матриця являється *комутативною* (перестановною) матрицею, тобто

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E . \tag{3.26}$$

Обернена матриця A^{-1} для квадратної матриці **A** існує тільки тоді, коли матриця **A** являється не виродженою, тобто, якщо її визначник відмінний від нуля.

Якщо **A** і **B** невироджені матриці , то матриця обернена їх добутку дорівнює добутку дорівнює добутку обернених матриць, взятих в оберненому порядку

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{3.27}$$

Ціла від'ємна степінь оберненої матриці

$$A^{-m} = (A^{-1})^{m}. \tag{3.28}$$

При обчисленні оберненої матриці прямими методами із-за похибок заокруглень можуть виникнути значні похибки, і таким чином, знайдену обернену матрицю необхідно виправити. Щоб виявити похибку, достатньо, позначивши через D_0 вичислену обернену матрицю, зробити множення D_0 на **A**. Якщо D_0 дійсно являється оберненою матрицею, то повинно бути

$$D_0 A = E \tag{3.29}$$

Невиконання цієї рівності свідчить про наявність похибки і необхідності виправлення елементів матриці D_0 .

Допустимо, що контрольне обчислення величини AD_0 показало, що матриця

$$F_0 = E - AD_0 \tag{3.30}$$

задовольняє умову

$$\|F_0\| \le \alpha \langle 1 . \tag{3.31}$$

При виконанні цієї умови елементи матриці D_0 можуть бути як завгодно покращені за допомогою слідуючого ітераційного процесу. Нехай

$$D_1 = D_0(E+F_0), \quad F_1 = E - AD_1$$
$$D_2 = D_1(E+F_1), \quad F_2 = E - DD_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.32)$$
$$D_m = D_{m-1}(E+F_{m-1}), \quad F_m = E - FD_m$$

маємо: $F_m = E - AD_m = E - AD_{m-1}(E+F_{m-1})$,

або

$$F_m = E-(E-F_{m-1})(E+F_{m-1}) = F_{m-1}^2 = F_{m-2}^2 = \ldots = F_o^{2m}. \qquad (3.33)$$

Таким чином,

$$D_m = A^{-1}(E - F_0^{2m}). \qquad (3.34)$$

Остання формула показує, що $D_m \to A^{-1}$ при $m \to \infty$. Вкажемо при цьому оцінку похибки.

Маємо

$$\left\|D_m - A^{-1}\right\| = \left\|-A^{-1}F_0^{2m}\right\| = \left\|-D_0(E-F_0)^{-1}F_0^{2m}\right\| \le \left\|D_0\right\|(E-$$
$$-F_0)^{-1}\|\cdot\left\|F_0^{2m}\right\| \le \left\|D_0\right\|\frac{\alpha^{2m}}{1-\alpha}$$

Вказаний ітераційний процес виявляється дуже корисним при практичному рішенні задач, тому що прямі методи обчислення оберненої матриці в багатьох випадках дають значні похибки із-за великої кількості арифметичних операцій, які при цьому приходиться виконувати.

Практичне заняття **5**. Обернена матриця.

Матриця A^{-1} називається оберненою матриці **A**, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Для того, щоб матриця **A** мала обернену

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

матрицю, необхідно і достатньо, щоб вона була не вроджена, тобто щоб $|A| \neq 0$. Обернена матриця визначається за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (5.1)$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} у визначнику $|A|$. Алгебраїчні доповнення для строчок матриці $\mathbf{A}$ записуються стовпці матриці (5.1). Так наприклад, у першому стовпці цієї матриці стоять алгебраїчні доповнення першої строчки матриці $\mathbf{A}$.

За допомогою оберненої матриці рішаються матричні рівняння виду

$$AX = B \text{ і } YA = B \text{ (при } |A| \neq 0\text{).}$$

(5.2)

Множачи перше рівняння на A^{-1} зліва, а друге на A^{-1} справа, отримуємо їх рішення в виді

$$X = A^{-1}B \text{ і } Y = BA^{-1}.$$

(5.3)

Властивості

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
2. $(A^{-1})^{-1} = A$,
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})$,
4. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$.

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Задача 1. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Рішення. Покажемо спочатку, що дана матриця невироджена, тоді вона має обернену матрицю. Дійсно,

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=6-4=2\neq 0.$$

Вичислим алгебраїчне доповнення елементів матриці:

$$A_{11}=2,\ A_{21}=-1,\ A_{12}=-4,\ A_{22}=3.$$

Тоді, матриця A^{-1}, обернена до **A**, має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{matrix}1 & -1/2\\ -2 & 3/2\end{matrix}$$

Перевіримо правильність отриманого результату

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -2 & 3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Задача 2. Знайти матрицю, обернену для матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Рішення. Так як $|A|=-1\neq 0$, то дана матриця невироджена. Вичислимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-1;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}=38;$$

$$A_{13}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-27.$$

Аналогічно знаходимо $A_{21}=1,\ A_{22}=-41,\ A_{23}=49,\ A_{31}=-1,$

$A_{32} = 34$, $A_{33} = -24$. Таким чином

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо добуток

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Що показує правильність отриманого результату.

Задача 3. Рішити матричне рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \text{ або } XA = B.$$

Рішення. За формулою (5.3) маємо $X = BA^{-1}$.

Так як $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$,

Тому

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -64 & 36 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 16 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Показати, що матриця S^{-1}, обернена симетричній матриці $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, буде також симетричною.

Задача 5. знайти матриці, обернені для слідуючих:

Відповідь:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

$$б)\begin{pmatrix} \sin\mu & \cos\mu \\ -\cos\mu & \sin\mu \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sin\mu & -\cos\mu \\ \cos\mu & \sin\mu \end{pmatrix},$$

$$в)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix},$$

$$г)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & в & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/в & 0 \\ 0 & 0 & 1/e \end{pmatrix}$$

Задача 6. Рішити слідуючі матричні рівняння

Відповідь:

$$a)\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$б)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 25 & -25 \\ -26 & -2 \end{pmatrix},$$

$в) AX = B$ і $УA = B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$X = A^{-1}B,\ У = B \cdot A^{-1},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Показати, що якщо $AB = BA$, то $A^{-1}B = BA^{-1}$.

Задача 8. Як зміниться обернена матриця A^{-1}, якщо в матриці **А** переставити місцями дві строчки?

Задача 9. Показати, що якщо матриця **А** немає оберненої, то її добуток на будь-яку матрицю **В**, також, немає оберненої.

Задача 10. Дві матриці **А** і **В** називаються подібними, якщо вони зв'язані рівністю $B = T^{-1}AT$, де **Т** – деяка невироджена матриця. Показати, що подібні матриці мають однакові визначники.

Лекція 4. Ранг матриці.

Викреслимо із матриці **А** декілька строчок і стовпців так, щоб кількість строчок, що залишилися дорівнювала кількості залишених стовпців. Якщо після цього замінити знак матриці на знак визначника, то отриманий визначник називається *мінором* матриці **А**. Матриця має багато мінорів, при чому деякі з них можуть дорівнювати нулю, а другі будуть відмінні від нуля.

Найвищий із порядків мінорів, відмінних від нуля називається рангом матриці **А**. Це дуже важлива її характеристика.

Наприклад, у матриці $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ всі три мінори другого порядку $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ дорівнюють нулю, тоді як серед шести мінорів першого порядку є чотири відмінних від нуля. Визначник першого порядку приймається рівним своєму єдиному елементу. Тому, $rang\ B = 1$. Не важко доказати, що ранг матриці

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ дорівнює 2. Помножимо перший стовпчик на -2 і додамо до другого стовпчика. Отримаємо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Помножимо першу строчку на -1 і додамо до другої, отримаємо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Помножимо другу строчку на -1 і додамо до третьої. Тоді отримаємо $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Значить ранг матриці дорівнює 2.

Самостійно перевірити, що ранги матриць

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

Дорівнюють відповідно 3, 2, 1, 1.

Ранг нульової матриці, у якій зовсім немає мінорів, відмінних від нуля, приймається рівним нулю.

Ясно, що ранг квадратної матриці не перевищує її порядок. Ранг дорівнює порядку в тому і тільки в тому випадку, якщо матриця не вироджена.

Ранг матриці розміру $m \times n$, де $m \neq n$ не перевищує меншого із чисел m і n. Можна доказати, над чим ми не будемо зупинятися, що ранг матриці дорівнює максимально можливому числу її лінійно незалежних строчок.

Відмітимо, що строчки матриці самі являються матрицями, тобто над ними можна виконувати лінійні дії. Так, в першому прикладі (4.1) – всі три строчки лінійно незалежні, а третя дорівнює їх сумі; у третьому прикладі друга і третя строчки лінійно виражають через першу.

У транспонованих матриць ранги однакові. Тому, ранг одночасно дорівнює максимально можливому числу лінійно незалежних стовпців матриці.

За допомогою поняття рангу формуються кінцеві теореми про розрішимість систем лінійних алгебраїчних рівнянь, числу невідомих. Розглянемо для визначеності систему із трьох рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{aligned} a_1x = в_1y + c_1z + d_1u = f_1, \\ a_2x = в_2y + c_2z + d_2u = f_2, \\ a_3x = в_3y + c_3z + d_3u = f_3. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Якщо ввести числові вектори

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}, \ldots, \quad f \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

то систему (4.2) можна записати у вигляді

$$f = xa + yв + zc + ud, \tag{4.3}$$

тобто задача зводиться до розкладу заданого вектора f по чотирьом заданим векторам $a,\ в,\ c,\ d$. Коли це можливо? Всі вектори виду $xa + yв + zc + ud$ при заданих $a,\ в,\ c,\ d$ і все можливих X, Y, Z, U. утворюють лінійний підпростір в E_3, "натягнутий" на $a,\ в,\ c,\ d$. Розмірність цього підпростору дорівнює максимальному числу К лінійно незалежних векторів серед $a,\ в,\ c,\ d$, тобто рангу матриці А коефіцієнтів системи (4.2). Для розкладу (4.3) необхідно, щоб вектор f лежав у вказаному підпросторі, тобто щоб серед векторів $a,\ в,\ c,\ d,\ f$ було також тільки **К** лінійно незалежних. Таким чином,

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

отримуємо необхідну і достатню умову існування рішення систе[ми] (4.2)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & \text{в}_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & \text{в}_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & \text{в}_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & \text{в}_1 & c_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & \text{в}_2 & c_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & \text{в}_3 & c_3 & d_3 & f_3 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Аналогічний вигляд має умова роз рішимості для будь-якого числа рівнянь невідомих.

Нехай тепер умова роз рішимості (4.4) виконана; скільки тоді рішень має система (4.2)? Якщо позначити через X_0, Y_0, Z_0, U_0 яке-небудь одне рішення цієї системи і ввести в заміну змінних

$$x = x_0 + x', \ldots, u = u_0 + u', \qquad (4.5)$$

то легко перевірити, що x', y', z', u' повинні задовольняти відповідну однорідну систему

$$\begin{aligned} a_1\kappa' &= \text{в}_1 y' + c_1 z' + d_1 u' = 0, \\ a_2\kappa' &= \text{в}_2 y' + c_2 z' + d_2 u' = 0, \\ a_3\kappa' &= \text{в}_3 y' + c_3 z' + d_3 u' = 0. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Виведемо в підпростір E_4 числові вектори

$$P_1\begin{pmatrix} a_1 \\ \text{в}_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \; P_2\begin{pmatrix} a_2 \\ \text{в}_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}, \; P_3\begin{pmatrix} a_3 \\ \text{в}_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ u' \end{pmatrix}. \qquad (4.7)$$

Тоді систему (4.6) можна переписати у вигляді

$$P_1 \cdot X' = 0, \; P_2 \cdot X' = 0, \; P_3 \cdot X' = 0. \qquad (4.8)$$

Таким чином, шуканий вектор X' повинен бути перпендикулярним до підпростору $\text{в}E_4$, "натягнутому" на $p_1, \; p_{2,} \; p_3$. Розмірність цього підпростору дорівнює рангу (4.4), а тому неважко перевірити, що розмірність лінійного підпростору векторів X' дорівнює 4 – rang **A** (в загальному випадку замість повинно бути число невідомих). Такою ж буде і розмірність сукупності рішень системи (4.8); якщо кожне рішення розглядати як набір координат точки $вE_4$, то отримаємо при виконанні умови (4.4) сукупність рішень системи (4.2), що визначає $вE_4$ гіперплощина розмірності 4 – rang **A**.

Практичне заняття **6**. Прямокутні матриці і елементарні перетворення матриць.

Прямокутна таблиця чисел, розташована в m строчках і в n стовпцях, називається прямокутною матрицею розміру m х n, або (m х n) – матрицею:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (6.1)$$

Елементарними перетвореннями першого роду матриці **A** називаються слідуючі дії:

1) множення деякої на число $\lambda \neq 0$
2) перестановка двох строчок;
3) додавання до елементів однієї строчки відповідних елементів другої строчки, помножених на число λ.

Елементарними перетвореннями другого роду матриці **A** називаються аналогічні дії зі стовпцями.

За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю **A** можна привести до спеціального виду:

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Число r одиниць, які стоять на головній діагоналі, не залежать від способу приведення матриці **A** до вигляду A_r і називається рангом матриці **A**.

Матриці, які отримують із одної елементарними перетвореннями, називаються еквівалентними і з’єднуються знаком ∞. У еквівалентних матриць однакові ранги.

Задача 1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Рішення. Піддамо цю матрицю слідуючим елементарним перетворюванням. До другого стовпчика додамо перший, помножений на (-4), а до третього стовпчика додамо перший, помножений на (-10). Після до другої строчки додамо третю, помножену на (-4). В результаті таких перетворень отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -13 \end{pmatrix}.$$

Тепер першу строчку помножимо на 5 і на (-3) і прибавимо відповідно до другої і третьої строчок, а після переставимо місцями другу і третю строчки; тоді будемо мати матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальше, якщо помножити на (1/5) і (1/13) другий і третій стовпчик, а після відняти із третього стовпчика другий, то отримаємо матрицю:

$$A_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ранг r даної матриці дорівнює двом, тобто $r = 2$.

Задача 2. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рішення.

1) помножимо перший стовпчик на (-2) і додамо до четвертого (запишемо в четвертий стовпчик);

2) додамо перший стовпчик до третього і запишемо в третій стовпчик . Тоді отримаємо матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до другої строчки третю і запишемо у другу строчку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помножимо першу строчку на (-3) і додамо до другої:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помножимо четвертий стовпчик на (-5) і додамо до третього і на 7 і додамо до другого, а без множення додамо до першого і запишемо у відповідний стовпчик :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Третю строчку додамо до другої, а отриману другу строчку помножимо на (-1) і додамо до третьої:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четвертий стовпчик помножимо на (-1) і додамо до другого стовпчика. Додамо другий стовпчик до четвертого:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В кінцевому запису отримаємо

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -6 & 1 \end{pmatrix} \infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \infty$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином ранг матриці дорівнює двом.

Задача 3. Знайти ранг слідуючих матриць

Відповідь:

$a)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$ $\qquad r = 2,$

$б)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$ $\qquad r = 1,$

$в)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix},$ $\qquad r = 3,$

$г)\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix},$ $\qquad r = 2,$

$$ д)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad r = 4. $$

Лекція 5. Характеристичні числа і власні вектори матриці

Нехай **A** – задана квадратна матриця. При проведенні досліджень іноді приходиться розглядати рівняння

$$ AX = \lambda X, \tag{5.1} $$

де X – невідомий числовий вектор, висота якого дорівнює порядку **A**, а **λ** – невідоме число. При будь-якому **λ** рівняння (5.1) має, зокрема, тривіальне рішення $X = 0$, але нас будуть цікавити тільки такі **λ**, при яких ця система має нетривіальне рішення. Ці значення **λ** називаються **власними значеннями матриці A**, а рішення X рівняння (5.1) при таких **λ-її власними векторами**.

Власні значення і власні вектори знаходяться наступним чином. Так як

$$ X = E \cdot X \tag{5.2} $$

То рівняння (5.1) можна переписати у вигляді

$$ (A - \lambda\, E)X = 0\,. \tag{5.3} $$

Порівнюючи з формулою (5.4)

$$ AX = d\,, \tag{5.4} $$

бачимо, що отримали систему із n алгебраїчних лінійних однорідних рівнянь з n невідомими, де n – порядок матриці **A**. Для наявності нетривіального рішення необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю, тобто

$$ \det(A - \lambda\, E) = 0\,. \tag{5.5} $$

Це рівняння називається **характеристичним рівнянням** матриці **A**, воно служить для пошуку власних значень **λ**.

Матриця

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}, \qquad (5.6)$$

називається **характеристичною матрицею** відповідній матриці **A**. Визначник

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (5.7)$$

називається **характеристичним визначником матриці A**, а корені рівняння (5.5) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - **характеристичними числами** матриці **A**. Для матриці **A** характеристичним рівнянням буде

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (5.8)$$

Розкриваючи визначник, ми бачимо, що маємо алгебраїчне рівняння, степінь якого дорівнює порядку матриці **A**.

Матриця порядку n має n власних значень, серед яких, правда, можуть бути співпадаючі.

Знайшовши яке-небудь власне значення, ми можемо відповідні власні вектори знайти із векторного рівняння (5.3) (переписаного у вигляді системи скалярних рівнянь).

Із рівняння(5.3) слідує, що при зафіксованому $\boldsymbol{\lambda}$ сума рішень

$$У = X^1 + X^2 \qquad (5.9)$$

буде знову рішенням і добуток

$$у = кх \qquad (5.10)$$

рішення на число буде також рішенням того ж рівняння. Значить сукупність всіх власних векторів, відповідаючи заданому власному значенню, утворює лінійний підпростір простору всіх числових векторів заданої висоти n.

В найбільш важливому випадку, коли всі власні значення різні, кожний із цих підпросторів одномірний, тобто для кожного власного значення відповідний власний вектор визначений з точністю до числового множника. При цьому маються на увазі комплексна розмірність і комплексні власні вектори, тому що числове характеристичне рівняння (5.5) може мати як числові так і не числові уявні корені. Вказана одномірність витікає із того, що не нульові власні вектори, які відповідають різним власним значенням, обов'язково лінійно незалежні, а в n – мірному просторі числових векторів не може бути більше n лінійно незалежних векторів. А ця лінійна незалежність перевіряється наступним чином: якщо, наприклад, власні вектори X^1, X^2, X^3

відповідають різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_3$, причому X^1 з X^2 лінійно незалежні, а

$$X^3 = \alpha X^1 + \beta X^2, \qquad (5.11)$$

то помноживши цю рівність справа на **A**, отримаємо

$$\lambda_3 X^3 = \alpha\lambda_1 X^1 + \beta\lambda_2 X^2, \qquad (5.12)$$

чому протирічить лінійна незалежність X^1 і X^2. Якщо маємо співпадаючі власні значення, то можна перевірити, що для кожного власного значення λ_k кратності n_k підпростір власних векторів має розмірність $m_k \langle n_k$. Якщо всі $m_k = n_k$, то вибравши базис в кожному із цих підпросторів, ми отримаємо базис в комплексному числовому просторі Z_n, що складається із власних векторів матриці **A**, яка має порядок n (якщо всі λ_k числові, отримаємо базис в E_n). Якщо хоча б одне $m_k \langle n_k$, то базиса із власних векторів матриці **A** вказати неможна.

Нехай, λ_1 - характеристичне число кратності κ, тобто кратний корінь рівняння (5.5). так як число λ_1 являється коренем останнього рівняння, то вираз

$$(\lambda - \lambda_1)^{\ell_1},\ (\lambda - \lambda_1)^{\ell_2}, \ldots,\ (\lambda - \lambda_1)^{\ell_{m+1}}, \qquad (5.13)$$

де $\ell_1 = \kappa - \kappa_1,\ \ell_2 = \kappa - \kappa_2, \ldots,\ \ell_m = \kappa_{m-1} - \kappa_m,\ \ell_{m+1} = \kappa_m,$

(5.14)

причому $Ki(i=1,2,\ldots,m)$ – показники степені загального найбільшого дільника $(\lambda - \lambda_1)^{\kappa_i}$ всіх визначників (n-i)-ого порядку, які отримуються із характеристичного визначника послідовним викреслюванням i строчок і i стовпців, що очевидно, є дільниками визначника (5.5). Ці вирази називаються **елементарними дільниками матриці A**, які відповідають характеристичному числу λ_i. Сума показників всіх елементарних дільників $l_1 + l_2 + \ldots + l_{m+1}$ дорівнює кратності K характеристичного числа.

Якщо будь-який із показників степені $l_i = 1$, то відповідний йому дільник $\lambda - \lambda_1$ називається **простим**. Якщо ж показник $l_i > 1$, то елементарний дільник $(\lambda - \lambda_1)^{\ell_i}$ називається ***непростим.***

Визначивши елементарні дільники, відповідні всім характеристичним числам матриці **A**, отримуємо сукупність всіх елементарних дільників цієї матриці:

$$(\lambda - \lambda_1)^{h_1}, (\lambda - \lambda_1)^{h_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_1)^{h_r} \qquad (5.15)$$

де $h_1, h_2, \ldots, h_r$ - цілі числа (причому $1 \le h_i \le n$), а їх сума дорівнює порядку матриці **A**, тобто

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r = n. \qquad (5.16)$$

Розглянемо квазідіагональну матрицю

$$\left[I_{h_1}(\lambda_1), I_{h_2}(\lambda_2), \ldots, I_{h_r}(\lambda_r) \right], \qquad (5.17)$$

В якій під $I_1(\lambda_m)$ розуміється число λ_m. Ця матриця має ті ж елементи дільника, що і матриця **A**.

Матриця (*) називається **канонічною матрицею**, відповідною матриці **A,** якщо всі елементарні дільники $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \ldots, \lambda - \lambda_m$ матриці **A** прості, то матриця (*) перетворюється в діагональну матрицю $[\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \ldots, \lambda - \lambda_r]$. Всяка матриця **A** може бути приведена до канонічного виду.

Дві матриці **A** і **B** називаються **подібними**, якщо вони зв’язані співвідношенням

$$B = VAV^{-1} \qquad (5.18)$$

Де **V** деяка невироджена матриця.

Перетворення, за допомогою якого із матриці **A** отримують матрицю **B** називається перетворенням подібності **V**.

Перетворення подібності дає можливість привести матрицю до найбільш простого канонічного виду.

Теорема. Якщо матриця **A** має елементарні дільники

$$(\lambda - \lambda_1)^{h_1}, (\lambda - \lambda_1)^{h_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_1)^{h_r}, \qquad (5.19)$$

де

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r = n, \qquad (5.20)$$

то існує така невироджена матриця **V**, що

$$\left[I_{h_1}(\lambda_1), I_{h_2}(\lambda_2), \ldots, I_{h_r}(\lambda_r) \right], \qquad (5.21)$$

де

$$I_1(\lambda_m) = \lambda_m. \qquad (5.22)$$

Цей вираз дає канонічне представлення матриці **A**, а квазідіагональна матриця

$$\left[I_{h_1}(\lambda_1), I_{h_2}(\lambda_2), \ldots, I_{h_r}(\lambda_r) \right] \qquad (5.23)$$

представляє канонічний вид матриці **A**.

Зокрема, якщо всі елементарні дільники матриці **A** прості, то канонічним видом матриці **A** являється діагональна матриця

$$[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n], \qquad (5.24)$$

а канонічним представленням матриці **A**:

$$V[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]V^{-1}. \qquad (5.25)$$

(Доведення теореми опускаємо).

Практичне заняття 7. Характеристичні числа і власні вектори матриці.

Всякий ненульовий вектор **X**, який задовольняє умову

$$AX = \lambda X \qquad (X \neq 0),$$

називається **власним вектором** перетворення **A** або матриці **A**, число λ - **власним значенням** (характеристичним числом) **A**, відповідаючому вектору **X**. Власні значення λ матриці **A** являються коренями її характеристичного рівняння

$$|A-\lambda E|=0, \qquad (*)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\Psi_1 +$$

$$+\ldots+\Psi_{n-1}\lambda+\Psi_n=0,$$

Де $\Psi_1 = a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{nn}$ - слід матриці, а

$$\Psi_n = |A|.$$

В загальному випадку маємо n різних власних значень – комплексних, або числових коренів рівняння (*), але в окремих випадках при наявності кратних коренів їх число зменшується.

Власний вектор $X_0 = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, відповідний характеристичному числу λ_0, визначається із системи рівнянь

$$\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda_0)u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n = 0, \\ &a_{21}u_1 + (a_{22}-\lambda_0)u_2 + \ldots + a_{2n}u_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_0)u_n = 0. \end{aligned}$$

Власні вектори визначаються умовою $AX=\lambda X$ з точністю до числового множника, тому рішаючи дану систему, можна одну із координат вектора X_0 фіксувати на деякому

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

конкретному значенні. У випадку, коли λ_0 - кратний корінь, дана система може визначати не один власний напрямок, а множину таких напрямків.

Задача 1. Знайти характеристичні числа і власні вектори лінійного перетворення, за даною матрицею

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}.$$

Рішення. Складемо характеристичне рівняння даного перетворення

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(2-\lambda)-20=\lambda^2-5\lambda-14=0$$

із якого отримуємо, що дані перетворення мають характеристичні числа

$\lambda_1=-2$ і $\lambda_2=7$, для рівняння $X^2+PX+q=0$, буде $X_{12}=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\frac{P^2}{4}-q}$. І в нашому випадку $\lambda_1=+\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{25}{4}+14}=2{,}5-4{,}5=-2$; а $\lambda_2=2{,}5+4{,}5=7$.

Власний вектор $X_1=\{u_1,u_2\}$, який відповідає характеристичному числу λ_1, визначається рівняннями

$$(3+2)u_1+4u_2=0$$

або
$$5u_1+(2+2)u_2=0.$$

Тобто
$$5u_1+4u_2=0.$$

Прийнявши $u_1=4$, знайдемо $u_2=-5$ і отримаємо $X_1\{4,-5\}$.

Аналогічно, власний вектор $X_2=\{U_1,U_2\}$, який відповідає характеристичному числу $\lambda_2=7$, визначається у вигляді $X_2=\{1{,}1\}$.

$$\begin{vmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix},$$

$$-4U_1 + 4U_2 = 0,$$

$$5U_1 - 5U_2 = 0,$$

$$U_2 = U_1.$$

Прийнявши $U_1 = 1$, отримаємо $U_2 = 1$.

Задача 2. Знайти характеристичні числа і власні вектори матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Рішення. Складемо характеристичне рівняння даної матриці

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -3 \\ 6 & 4 & -(4+\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник $|A - \lambda \mathrm{E}|$, отримаємо

$$|A - \lambda \mathrm{E}| = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Розкладемо отриманий многочлен на лінійні множники

$$|A - \lambda \mathrm{E}| = (\lambda^3 - 1) - 6(\lambda^2 - 1) + 11(\lambda - 1) =$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

отримаємо $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 3.$

Власний вектор **X**, який відповідає характеристичному числу $\lambda_1 = 1$, визначається із системи рівнянь

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$(5-1)u_1 + 2u_2 - 3u_3 = 0,$$
$$4 \cdot u_1 + (5-1)u_2 - 4u_3 = 0,$$
$$6u_1 + 4u_2 - (4+1)u_3 = 0.$$

Або

$$f_1 = 4u_1 + 2u_2 - 3u_3 = 0,$$
$$f_2 = 4u_1 + 4u_2 - 4u_3 = 0,$$
$$f_3 = 6u_1 + 4u_2 - 5u_3 = 0.$$

Безпосередньо видно, що третє рівняння – це лінійна комбінація перших двох рівнянь

$$f_3 = f_1 + \frac{1}{2} f_2,$$

тому така система трьох рівнянь з трьома невідомими приводиться до системи двох рівнянь

$$4u_1 + 2u_2 - 3u_3 = 0,$$
$$u_1 + u_2 = 2.$$

Нехай, $u_3 = 2$, тоді рішаючи отриману систему, знайдемо $u_1 = 1; u_2 = 1$. таким чином, $X = \{1,1,2\}$. власний вектор X_2, який відповідає характеристичному числу $\lambda_2 = 2$, визначається системою рівнянь

$$3U_1 + 2U_2 - 3U_3 = 0,$$
$$4U_1 + 2U_2 - 4U_3 = 0,$$
$$6U_1 + 4U_2 - 6U_3 = 0.$$

Рішаючи систему, знаходимо

$$X_2 = \{1,0,1\}.$$

Аналогічно знаходимо, що вектор

$$X_3 = \{1,2,2\}$$

відповідає характеристичному числу $\lambda_3 = 3$.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Задача 3. На прикладі матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ (див. задачу 1.) показати, що характеристичними числами оберненої матриці A^{-1} являються обернені значення характеристичних чисел матриці **A**.

Рішення. Складемо обернену матрицю A^{-1}.

Так як $|A|=-14$, то

$$A^{-1}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{-1}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{5}{14} & -\frac{3}{14}\end{pmatrix}.$$

Тепер складемо характеристичне рівняння матриці A^{-1}

$$\left|A^{-1}-\mu E\right|=\begin{vmatrix}-\left(\frac{-1}{7}+\mu\right) & \frac{2}{7}\\ \frac{5}{14} & -\left(\frac{3}{14}+\mu\right)\end{vmatrix}=$$

$$=\mu^2+\frac{5}{14}\mu-\frac{1}{14}=0.$$

Рішаючи квадратне рівняння, отримаємо

$$\mu=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{14}\pm\sqrt{\frac{25}{196}+\frac{4}{14}}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{14}\pm\frac{9}{14}\right),$$

звідки маємо

$$\mu_1=-\frac{1}{2},\ \mu_2=\frac{1}{7}.$$

Із отриманого результату можна заключити, що характеристичні числа оберненої матриці A^{-1} дорівнюють оберненим величинам відповідних характеристичних чисел матриці **A**. Замітим, що таку властивість мають всі квадратні невироджені матриці.

Задача 4. Для даних матриць $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ показати, що $AB \neq BA$, але AB і BA мають однакові характеристичні числа.

Задача 5. Знайти характеристичні числа і власні вектори симетричної матриці $S=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Показати , що власні вектори ортогональні,

Відповідь: $\lambda_1 = 9$; $\lambda_2 = 6$; $\lambda_3 = 3$.

Задача 6. Показати ,що число $\lambda = 1$ являється максимальним характеристичним числом для матриці $P=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}$ і мінімальним для матриці P^{-1}.

Задача7. Показати, що якщо $P_1 = PI_1$ і $P=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, а $I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то матриці P і P_1 мають однакові максимальні характеристичні числа $(\lambda_1 = 1)$, а мінімальні їхні характеристичні числа відрізняються тільки знаком.

Задача 8. Знайти характеристичні числа матр...

$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ і A^2; вияснити залежність між їх характеристичними числами

Відповідь: для A; $\lambda_1=-2$; $\lambda_2=1$; $\lambda_3=3$. Для $A^2: \lambda_1=4; \lambda_2=1; \lambda_3=9, \lambda\left(A^2\right)=\lambda\left(A\right)^2$.

Задача 9. Знайти характеристичні числа матриць $A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ і $P(A)=A^2-2A-3E$. Показати на цьому прикладі, що якщо матриця A має характеристичними числами λ_1 і λ_2 ,то матриця $B=P(A)$ має характеристичні числа $P(\lambda_1)$ і $P(\lambda_2)$.

Відповідь: $\lambda_1=1$ і $\lambda_2=4$ - характеристичні числа матриці A; $\mu_1=P(1)=-4, \mu_2=P(4)=5$ - характеристичні числа $P(A)$.

Задача10.Дані матриці: $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ і $T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.На прикладі матриць $AB=TAT^{-1}$ показати, що подібні матриці мають однакові характеристичні числа.

Лекція 6. Рішення системи лінійних рівнянь за формулами Крамера

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$У=AX, \tag{6.1}$$

В якій матриця A є не особливою, тобто її визначник не дорівнює

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

нулю. Вектор невідомих X

$$X = \{X_{1,} X_2, \ldots, X_n\}. \tag{6.2}$$

Вектор відомих значень функціональної залежності

$$Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{6.3}$$

Необхідно рішити систему (6.1) відносно $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Представимо систему (6.1) у вигляді

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{6.4}$$

З цією метою помножимо рівності (6.4) відповідно на $A_{11}, A_{21}, A_{31}, \ldots, A_{n1}$ - алгебраїчні доповнення елементів першого стовпчика визначника $|A|$ і результати складемо. Це дасть

$$\begin{aligned} & A_{11}Y_1 + A_{21}Y_2 + \ldots + A_{n1}Y_n = \\ & = (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1})X_1 + \\ & + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1})X_2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1})X_n. \end{aligned} \tag{6.5}$$

За властивостями визначників перша із фігуруючих тут дужок дорівнює $|A|$ (сума добутків елементів любого стовпця визначника на їх алгебраїчне доповнення дорівнює визначнику), всі слідуючі дужки перетворюються в нулі (сума добутків елементів будь-якого стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів другого стовпця завжди дорівнює нулю).

Таким чином

$$A_{11}Y_1 + A_{21}Y_2 + \ldots + A_{n1}Y_n = |A| X_1. \tag{6.6}$$

Приймаючи до уваги, що $$|A| \neq 0, \tag{6.7}$$

отримаємо

$$X_1 = \frac{1}{|A|}(A_{11}У_1 + A_{21}У_2 + \ldots + A_{n1}У_n). \qquad (6.8)$$

Аналогічні співвідношення знаходяться і для $X_{2,} X_3 \ldots$ (рівності 6.4) множаться на алгебраїчні доповнення елементів другого стовпця визначника $|A|$ і. т.і.

Таким чином, отримують слідуючу систему співвідношень

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{A_{11}}{|A|}У_1 + \frac{A_{21}}{|A|}У_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|}У_n, \\
X_2 &= \frac{A_{12}}{|A|}У_1 + \frac{A_{22}}{|A|}У_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|}У_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_n &= \frac{A_{1n}}{|A|}У_1 + \frac{A_{2n}}{|A|}У_2 + \ldots + \frac{A_{nn}}{|A|}У_n,
\end{aligned} \qquad (6.9)$$

де

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (6.10)$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (6.11)$$

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (6.12)$$

…………………………………………………..

$$A_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}. \qquad (6.13)$$

Матриця системи (6.9) називається оберненою для матриці **A** і позначається символом A^{-1}.

Таким чином, із співвідношення (6.1) слідує, що

$$X = A^{-1}У. \qquad (6.14)$$

Матриця

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (6.15)$$

де, як говорилось вище, A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника $|A|$, називається ***союзною*** для матриці **A**.

Нехай, A^T - матриця, отримана із **A** заміною строчок стовпцями, тобто транспонована матриця.

Так ось, якщо в транспонованій матриці A^T кожний елемент a_{ij} замінити відповідним алгебраїчним доповненням A_{ij}, то ми отримаємо ***союзну*** матрицю **A**.

Із формули (6.9) слідує, що

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}. \qquad (6.16)$$

Приклад 1. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рішення. В такому випадку

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, |A| = -2,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Якщо матриця **A неособлива**, то і матриця A^{-1} **неособлива**. При цьому

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \qquad (6.17)$$

Доведення теореми основується на двох лемах.

Лема 1. Якщо для будь-якого вектора **X**

$$AX = BX, \qquad (6.18)$$

То

$$A = B,$$

тобто

$$a_{ij} = в_{ij} \qquad (6.19)$$

Доведення. Із умови (6.18) слідує, що $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = в_{11}X_1 + в_{12}X_2 + ... + в_{1n}X_{n/}$ (6.20)

В силу довільності вектора X можна взяти

$$X = \{1,0,0,...,0\}. \qquad (6.21)$$

Це зразу дасть $A_{11} = в_{11.}$ Взяти

$$X = \{0,1,0,\ldots,0\}. \tag{6.22}$$

отримаємо $a_{12} = в_{12}$ і т. і.

Лема 2. Визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників, тобто

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \tag{6.23}$$

Насправді, в теорії визначників доказано (ми це доказувати не будемо), що добуток двох визначників $|A|$ і $|B|$ представляє собою визначник, для якого елементами, що стоять на перетині С-ї стрічки і j-го стовпця буде величина

$$C_{ij} = a_{i1}в_{1i} + a_{i2}в_{2i} + \ldots + a_{in}в_{nj}. \tag{6.24}$$

Але добуток матриць **A** і **B** є матриця **C** для якої елемент c_{ij} дається тією ж формулою. Тому

$$|C| = |A| \cdot |B|, \tag{6.25}$$

а це і є формула (6.23).

Докажемо тепер теорему. В силу співвідношень (6.1) і (6.14)

$$X = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X, \tag{6.26}$$

або

$$EX = (A^{-1}A)X \tag{6.27}$$

для будь-якого вектора **X**. По лемі 1

$$E = A^{-1}A \tag{6.28}$$

і по лемі 2

$$|E| = |A^{-1}| \cdot |A|, \tag{6.29}$$

або

$$1 = |A^{-1}| \cdot |A|. \tag{6.30}$$

Звідки витікає, що

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0. \tag{6.31}$$

Це доказує першу частину теореми.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Дальше. Так як матриця A^{-1} неособлива, то співвідношення (6.14) у свою чергу розрішимо відповідно $У$, при чому

$$У = \left(A^{-1}\right)^{-1} X. \qquad (6.32)$$

Співставивши цю формулу з (6.1), отримаємо

$$AX = (A^{-1})^{-1} X$$

для любого вектора **X**. Тому, по лемі 1

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (6.33)$$

- матриця, обернена до оберненої, співпадає з вихідною матрицею.

В силу співвідношень (6.28) і (6.33)

$$A \cdot A^{-1} = (A^{-1})^{-1}(A^{-1}) = E \qquad (6.34)$$

Звідси і із (6.28) слідує (6.17). **Теорема доказана**.

Приклад 2. Доказати, що із рівності $AB = E$ слідує, що $B = A^{-1}$.

Рішення. Дійсно, в силу леми 2

$$|A| \cdot |B| = |E| = 1,$$

Тобто **A** – неособлива матриця. Значить, A^{-1} існує. Помноживши рівність (6.35) на A^{-1} зліва, отримаємо

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}E,$$

або

$$(A^{-1}A)B = A^{-1} \qquad E \cdot B = A^{-1}, B = A^{-1}.$$

Загальний висновок: Всі розглянуті нами правила дій над матрицями і векторами (за виключенням можливості нерівності $AB \neq BA$ і деяких “неприємностей” з комплексними векторами), цілком аналогічні правилам звичайної арифметики.

Практичне заняття **8**. Рішення систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Нехай, дана система лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1, \\ &a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n = b_n. \end{aligned} \qquad (8.1)$$

Визначник n – го порядку

$$\Delta = |A| = |a_{ij}| \qquad (8.2)$$

складений із коефіцієнтів при невідомих, називається **визначником системи**. В залежності від визначника системи відрізняють слідуючі випадки:

а) Якщо визначник **Δ** системи (8.1) відмінний від нуля, то система має, і при тому єдине рішення, яке може бути визначено за формулами Крамера:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (8.3)$$

де визначник n – го порядку Δ і $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отримують із Δ шляхом заміни i – го стовпця вільними членами $b_1, b_2, \ldots, b_n$;

б) Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то система (8.1) або не сумісна, або має нескінчену множину рішень (в останньому випадку хоча б одне рішення системи (8.1) – наслідок других).

Задача 1. Рішити систему $\begin{aligned} &3x + 2y = 7, \\ &x - y = 4. \end{aligned}$

Рішення. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0,$$

Тому рішення її виконується за формулами Крамера

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{-5} \text{ і } Y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{-5}.$$

Але $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7 - 8 = -15;\ \Delta_2 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5.$

Тоді

$$X = \frac{-15}{-5} = 3;\ Y = \frac{5}{-5} = -1.$$

Геометрично кожне із рівнянь $3x + 2y = 7$ і $x - y = 4$ визначає пряму на площині XOY, і тому рішення $X = 3$, $Y = -1$ визначає точку перетину цих прямих.

Задача 2. Дослідити систему $\begin{matrix} x - 2y = 5, \\ 3x - 6y = 8. \end{matrix}$

Рішення. Визначник даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0,$$

але визначник

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 16 = -14 \neq 0,$$

Що показує несумісність системи.

Геометрично це означає, що дані прямі не перетинаються, тобто паралельні.

Задача 3. Рішити систему $\begin{matrix} x - 2y = 5, \\ 3x - 6y = 15. \end{matrix}$

Рішення. Визначники $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0.$$

Крім того, строчки у даних рівняннях пропорційні, а це значить, що визначники дорівнюють нулю. При цьому обидва рівняння системи визначають одну і ту ж пряму і рішенням системи являються координати будь-якої точки на цій прямій. Звідси слідує, що система має незкінченну множину рішень.

Задача 4. Знайти всі рішення слідуючих систем

Відповідь:

$2x - 5y = 11,$ $\quad x = 3;$

$x + 6y = -3.$ $\quad y = -1$

Задача 5.

Відповідь:

$3x - 5y + 1 = 0,$ $\quad x = -2;$

$7x + 3y + 17 = 0.$ $\quad y = -1.$

Задача 6.

$3x - 2y = 2,$

$9x - 6y = 6.$

Відповідь: координати всіх точок прямої: $3x - 2y = 2$.

Задача 7.

Відповідь:

$2x - 3y = 4,$

$4x - 6y = 7.$

Система не сумісна.

Задача8.Рішити систему $\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + y - z = 2. \end{array}$

Рішення. Вичисляємо визначники

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot(-3) - 3(-1)(-3) -$$

$$-2\cdot 2(-1) - 1\cdot 4\cdot 1 = 1 + 24 - 6 - 9 + 4 - 4 = 25 - 15 = 10.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то дана система має тільки одне рішення. Находимо його за формулами Крамера

$$\Delta = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2, Z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Рішити слідуючі системи.
Задача 10.

Відповідь:

$$3x + 2y - 4z = 8, \qquad x = 2,$$
$$2x + 4y - 5z = 11, \qquad z = 1,$$
$$4x - 3y + 2z = 1. \qquad y = 3.$$

Задача 11.

$$
\begin{aligned}
2ax - 3вy + cz &= 0,\\
3ax - 6вy + 5cz &= 2авc,\\
5ax - 4вy + 2cz &= 3авc.
\end{aligned}
$$

Відповідь:

$$
\begin{aligned}
x &= вc,\\
y &= ac,\\
z &= ав.
\end{aligned}
$$

Задача 12.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2,\\
x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1,\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3,\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3.
\end{aligned}
$$

Відповідь:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -2,\\
x_2 &= 0,\\
x_3 &= 1,\\
x_4 &= -1.
\end{aligned}
$$

Лекція 7. Числені методи рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь

1. Постановка проблеми.

Рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1}\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Або в матричній формі

$$AX = f, \tag{7.2}$$

де

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}. \qquad (7.3)$$

Як відомо із курсу алгебри, з теоретичної точки зору дане питання добре розроблено і у випадку, коли визначник матриці відмінний від нуля, дається формулами Крамера

$$X_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \qquad (7.4)$$

Де $|A_i|$ - визначник, отриманий із визначника $|A|$ матриці **A** шляхом заміни його j – го стовпця стовпцем вільних членів.

Але рішення системи рівнянь (7.1) з доведенням результату до числа представляє собою значні трудності і до нашого часу привертає увагу вчених – математиків.

Відомі в наш час багаточислені методи наближеного рішення систем лінійних рівнянь природньо розпадаються на дві великі групи: прямі методи і методи послідовних наближень.

Прямі методи характерні тим, що вони завжди приводять до цілі, якщо рішення системи існує. Але із-за великої кількості арифметичних операцій, які при цьому приходиться виконувати, виникає загроза накопичення похибок, що дуже часто при великому числі рівнянь може обезцінити результат.

Методи послідовних наближень вільні від останнього недоліку, але зате кожний конкретний із цих методів не завжди сходиться в застосуванні до конкретного класу систем.

Серед прямих методів, перш за все, необхідно назвати метод виключення Гауса і метод ортогональних векторів. Найбільш поширеними із методів послідовних наближень являється метод простої ітерації, метод Зейделя і метод релаксації (метод поправок).

Приведемо спочатку коротку характеристику кожного із цих методів.

Основна ідея методу виключень Гауса заключається в тому, що система рівнянь (7.1) приводиться до еквівалентної їй системи з трикутною верхньою матрицею (прямий хід виключень). Очевидно, що в даному випадку основним являється прямий хід виключень, тобто отримання відповідної системи з трикутною матрицею. Із отриманої таким чином системи невідомі знаходяться послідовними підстановками(обернений хід виключень).

Прямий хід виключень може бути здійснений, наприклад, наступним чином.

Вважаючи, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$ (це не обмежує узагальнення, тому, що в противному випадку достатньо було б змінити нумерацію рівнянь), ділимо перше із рівнянь системи (7.1) на коефіцієнт a_{11}, який називається ***ведучим*** , і після, помноживши отримане таким чином рівняння на $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ віднімаємо із відповідних рівнянь системи (7.1). В результаті приходимо до слідуючої системи:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + в_{12}x_2 + \ldots + в_{1n}x_n = в_{1n+1}, \\
&c_{22}x_2 + a_{23\cdot1}x_3 + \ldots + a_{2n\cdot1}x_n = a_{2n+1\cdot1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&c_{n2}x_2 + a_{n3\cdot1}x_3 + \ldots + a_{nn\cdot1}x_n = a_{nn+1\cdot1}.
\end{aligned}
\qquad (7.5)
$$

Поступаючи із цією системою (без вирахування першого рівняння) таким же чином із системою (7.1), отримаємо систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
&x_2 + в_{23}x_3 + \ldots + в_{2n}x_n = в_{2n+1}, \\
&c_{33}x_3 + a_{34\cdot2}x_4 + \ldots + a_{3n\cdot2}x_n = a_{3n+1\cdot2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&c_{n3}x_3 + a_{n4\cdot2}x_4 + \ldots + a_{nn\cdot2}x_n = a_{nn+1\cdot2}.
\end{aligned}
\qquad (7.6)
$$

Продовжуючи цей процес, накінець, отримаємо систему

$$x_{n-1} + в_{n-1}x_n = в_{n-1,n+1},$$

$$c_{nn}x_n = a_{nn+1,n-1}, \qquad (7.7)$$

$$x_n = в_{n,n+1}.$$

Приведена схема виключень відома під назвою схеми єдиного ділення. Очевидно, що ця схема здійснима в тих випадках, коли ведучі елементи кожної із системи (7.5), (7.6), … , (7.7) (без врахування перших рівнянь) відмінні від нуля. Якщо ж серед них який-небудь перетворюється в нуль, то у відповідній системі достатньо буде зробити перенумерацію рівнянь з тим, щоб продовжити процес виключень.

В деяких випадках з метою отримання більшої точності наближеного рішення ведучим коефіцієнтом системи (7.7) вибирають ***найбільший*** по модулю із елементів матриці **A**. Шляхом виключення відповідного невідомого отримують систему рівнянь, аналогічно системі (7.5). Із цієї системи таким же чином, вибираючи ведучим найбільший по модулю із коефіцієнтів цієї системи, отримують систему, аналогічну системі (7.6). Продовжуючи цей процес, отримують шукану систем рівнянь з трикутною матрицею. Так система виключень відома під назвою ***схеми головних елементів***.

Метод ортогональних векторів заключається в слідуючому.

Систему рівнянь (7.1), очевидно, можемо записати у вигляді

$$(r_i, x) = f_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \quad (7.8)$$

де r_i - вектори, задані своїми компонентами $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ у вихідному базисі $l_1, l_2, \ldots, l_n$,

$$(l_s, l_j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

f_i - компоненти ***f***. Вважаючи

$$\left.\begin{aligned}
&R_1 = r_1, R_2 = r_2 - \frac{(r_2, R_1)}{\|R_1\|^2} R_1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&R_n = r_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(r_n, R_k)}{\|R_k\|^2} R_k,
\end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

систему рівнянь (7.8) можна записати у слідуючому вигляді

$$(R_i, X) = F_i, \tag{7.10}$$

де F_i визначаються рівностями

$$\left.\begin{aligned}
&F_1 = f_1, F_2 = f_2 - \frac{(r_2, R_1)}{\|R_1\|^2} F_1, \\
&F_3 = f_3 - \frac{(r_3, R_1)}{\|R_1\|^2} F_1 - \frac{(r_3, R_2)}{\|R_2\|^2} F_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&F_n = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(r_n, R_k)}{\|R_k\|^2} F_k.
\end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Тепер, враховуючи, що вектори $R_1, R_2, \dots, R_n$ попарно ортогональні, рішення системи (7.8) зразу ж отримаємо у слідуючому вигляді

$$X = F_1 \frac{R_1}{\|R_1\|^2} + F_2 \frac{R_2}{\|R_2\|^2} + \dots + F_n \frac{R_n}{\|R_n\|^2}, \tag{7.12}$$

або в розгорнутій формі

$$X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{a_{ij}}{\|R_i\|^2} \qquad (j = 1,2,\dots,n). \tag{7.13}$$

Метод простої ітерації в основних своїх ри
заключається в слідуючому.

Нехай система лінійних рівнянь (7.1) задана у вигляді

$$
\begin{aligned}
x_1 &= в_{11}x_1 + в_{12}x_2 + \ldots + в_{1n}x_n + g_1, \\
x_2 &= в_{21}x_1 + в_{22}x_2 + \ldots + в_{2n}x_n + g_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= в_{n1}x_1 + в_{n2}x_2 + \ldots + в_{nn}x_n + g_n,
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

або в матричній формі

$$X = BX + g, \tag{7.15}$$

або

$$(E - B)X = g. \tag{7.16}$$

За початкове наближення беремо довільний вектор X_0 і підставляємо в праву частину рівності (7.15). Отримуємо у лівій частині рівності деякий вектор X_1. Поступаючи з X_1 таким же чином, як і із X_0, отримуємо вектор X_2. Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність векторів

$$
\begin{aligned}
X_1 &= BX_0 + g, \\
X_2 &= BX_1 + g, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{m+1} &= BX_m + g.
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

Очевидно, що якщо при $m \to \infty$ $X_m \to X$, то вектор **X** буде представляти собою рішення рівняння (7.15), тобто системи (7.14). Не вдаючись в деталі вияснення умов сходимості методу ітерації, вкажемо, що для позитивного рішення цього питання необхідно, щоб матриця **B** була мала в тому чи другому смислі, тобто щоб в матриці $(E - B)$ діагональні елементи достатньо переважали над рештою елементів і були близькі до одиниці.

Метод Зейделя відрізняється від методу простої ітерації тільки тим, що при підрахунку κ-ї компоненти вектора

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$X_{m+1} - (_{m+1})$-го наближення використовуються вже вичислені допомогою системи (7.14) $\kappa - 1$ перших компонент цього ж вектора. В деяких випадках метод Зейделя сходиться швидше ніж метод простої ітерації.

Коли обчислення приходиться виконувати вручну або за допомогою малих обчислювальних машин, часто найбільш зручним стає **метод релаксації**, який можна, також, назвати методом поправок.

Цей метод заключається у слідуючому. Нехай дана система лінійних рівнянь у слідуючому вигляді.

$$\begin{aligned}
&-X_1 + C_{12}X_2 + \ldots + C_{1n}X_n + h_1 = 0,\\
&C_{21}X_1 - X_2 + \ldots + C_{2n}X_n + h_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_{n1}X_1 + C_{n2}X_2 + \ldots - X_n + h_n = 0,
\end{aligned} \tag{7.18}$$

або в матричній формі

$$CX + h = 0, \tag{7.19}$$

де **C**-матриця і **h** – стовпець, відповідаючий системі (7.17).

Взявши за початкове наближення який-небудь вектор X_0 і підставивши його в ліву частину рівняння (7.19), ми замість нуля справа отримуємо цілком визначений вектор r з компонентами $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які будуть стояти в правих частинах відповідних рівнянь (7.18) замість нулів. Ці величини називаються **нев'язками**. Задача заключається в тому, щоб якось виправити вектор X_0 і отримати із нього вектор X_1, для якого нев'язки були б менші ніж для X_0. Після, виправляючи вектор X_1, намагаємося отримати вектор X_2, для якого нев'язки менші, ніж для X_1 і т. і., аж поки ці нев'язки не стануть достатньо малими в межах необхідної точності. Обчислювач, як правило, робить поправки на свій розсуд, змінюючи кожний раз одну, координату вектора, або зразу декілька координат. Вказати загальне правило для вибору поправок важко.

Процес релаксації стає більш простим, коли в застосовується до системи, в яких діагональні коефіцієнти по модулю не менші, а в деяких випадках більші суми модулів решти коефіцієнтів відповідного рівняння. В даному випадку рекомендується процес релаксації вести шляхом перетворення в нуль максимальної по модулю нев'язки за рахунок зміни координати, яка стоїть в даному рівнянні на діагоналі.

Практичне заняття **9**. Рішення систем рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Нехай дана система

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = в_n, \end{aligned} \tag{9.1}$$

або в матричні формі

$$AX = B, \tag{9.2}$$

де

$$A = (a_{ij}) \text{ -} \tag{9.3}$$

матриця із коефіцієнтів при невідомих, а **B** і **X** – вектор стовпців, що складаються із вільних членів і із невідомих.

Якщо матриця **A** невироджена, тобто визначник системи $\Delta = |A| \neq 0$, то помноживши обидві частини рівняння (9.2) на матрицю A^{-1} зліва, отримаємо рішення системи в матричній формі

$$X = A^{-1}B. \tag{9.4}$$

Знайти рішення слідуючих систем за допомогою оберненої матриці:

Задача 1. $\begin{aligned} &X + 3У = 2, \\ &X - 3У = 8. \end{aligned}$

Рішення. Визначник системи $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0,$

так, що матриця **A** невироджена і шукане рішення має вигляд (9.4)

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -30 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

звідси $x = 5$ і $y = -1$.

Задача 2. $2x + y + z = 2,$

$$5x + y + 3z = 14,$$
$$2x + y + 2z = 5.$$

Рішення. Визначник системи $\Delta = |A| = -3$, і тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Звідки слідує що $x = 2, y = -5, z = 3.$

Задача 3.

$$3x + y = 1,$$
$$x - y = 7.$$

Відповідь:
$x = 2,$
$y = -5.$

Задача 4.

$$2x - y + 4z = 15,$$
$$3x - y + z = 8,$$
$$-2x + y + z = 0.$$

Відповідь:
$x = 2;$
$y = 1;$
$z = 3.$

Задача 5.

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\
x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5,\\
4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2.
\end{aligned}
$$

Відповідь:

$x_1 = 1;$
$x_2 = 2;$
$x_3 = -2.$

Задача 6.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0,\\
x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9,\\
2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8,\\
2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5.
\end{aligned}
$$

Відповідь:

$x_1 = 3;$
$x_2 = -4;$
$x_3 = -1;$
$x_4 = 1.$

Задача 7.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7,\\
x_1 + 2x_3 + 2x_4 &= 5,\\
4x_1 + x_2 - x_3 &= 3,\\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 1.
\end{aligned}
$$

Відповідь:

$x_1 = 1;$
$x_2 = -1;$
$x_3 = 0;$
$x_4 = 2.$

Лекція 8. Оцінка невиключеної похибки при рішенні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Якщо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = f \tag{8.1}$$

вихідні дані, тобто матриця А і вектор f, дещо змінити, рішення також зміниться.

$$X = A^{-1} f \tag{8.2}$$

Наша мета заключається в тому, щоб вияснити характер і величину зміни вектора X при незначній зміні матриці А і вектора f. Це питання має принципове значення, тому що практично елементи матриці А і вектора f системи алгебраїчних рівнянь, що описують досліджуваний психологічний аспект, завжди визначають наближено. У випадку так званих «початково обумовлених» систем таке невелике відхилення від точних значень може повністю обезцінити отриманий в ході рішення результат.

Нехай матриця A отримує приріст R, який представляє собою матрицю, що складається із похибок елементів матриці A; вектор f - приріст h, компонентами якого служать похибки компонент вектора f,

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} \dots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} \dots r_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{n1} & r_{n2} \dots r_{nn} \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \\ h_n \end{pmatrix} \qquad (8.3)$$

Нехай,

$$A + R = \widetilde{A}, \qquad f + h = \widetilde{f}. \qquad (8.4)$$

Замінимо, дальше, систему (8.1) системою

$$\widetilde{A}\widetilde{X} = \widetilde{f}. \qquad (8.5)$$

Тоді різниця

$$\widetilde{X} - X = r, \qquad (8.6)$$

де $\widetilde{X}$ - рішення системи (8.5), представляє собою невиключену похибку рішення системи (8.1). Запишемо рівняння (8.5) в розгорнутій формі

$$(A + R)(x + r) = f + h. \qquad (8.7)$$

Віднімемо (8.1) із (8.7). Отримаємо

$$Ar + RX + Rr = h \qquad (8.8)$$

що можна перетворити до виду

$$r + A^{-1}RX + A^{-1}Rr = A^{-1}h, \qquad (8.9)$$

або

$$r = Br + g, \qquad (8.10)$$

де

$$B = -A^{-1}R, \quad .. \quad (8.11)$$

$$g = A^{-1}(h - Rx), \quad (8.12)$$

A^{-1} – обернена матриця до А, елементи якої ми будемо позначати через C_{ij}. Вважаємо , що

$$\|B\| < 1 \, . \quad (8.13)$$

Це припущення природнє в силу малості $\|R\|$. Якщо ж воно не виконується, то для того випадку будуть дані грубо наближені формули не виключених похибок.

Застосуємо до рівняння (8.9) метод простої ітерації за формулою

$$X_m = g + Bg + \ldots + B^{m-1}g \, . \quad (8.14)$$

Тоді рішення запишеться у вигляді ряду

$$r = \sum_{m=0}^{\infty} B^{mg} \, . \quad (8.15)$$

Звідси, враховуючи умови, яким підпорядковується норма суми і добутку матриць, отримаємо нерівність

$$\|r\| \le \frac{\|g\|}{1 - \|B\|} \, . \quad (8.16)$$

Перепишемо її в розгорнутому вигляді

$$\|r\| \le \frac{\|A^{-1}(h - RX)\|}{1 - \|A^{-1}R\|} \le \frac{\|A^{-1}h\| + \|A^{-1}RX\|}{1 - \|A^{-1}R\|} \, . \quad (8.17)$$

Звідси можуть бути отримані слідуючі оцінки:

$$\|r\| \le \frac{\|A^{-1}\|\|h\| + \|A^{-1}R\|\|X\|}{1 - \|A^{-1}R\|} \le \frac{\|A^{-1}\|(\|h\| + \|A^{-1}R\| \, \|f\|}{1 - \|A^{-1}R\|} \quad (8.18).$$

Останнє витікає із нерівності

$$\|X\| \le \|A^{-1}\|\|f\| \, . \quad (8.19)$$

Ці оцінки справедливі при любій нормі, причому не тільки для $\|r\|$, але також $|r_i|$, так як

$$|r_i| \le \|r\|. \tag{8.20}$$

Якщо мати на увазі яку- небудь із конкретно визначених раніше норм, то можна більше конкретизувати оцінки для $\|r\|$, а також дати більш точні оцінки для $|r_i|$. Дамо, наприклад, оцінки на випадок другої норми. При цьому будемо вважати, що всі елементи матриці R_i вектора h задовольняють умову

$$|r_{ij}| < \alpha \quad (i,j = 1,2, \ldots,n). \tag{8.21}$$

Згідно визначенню другої норми, а також накладеному на r_{ij} і h і обмеженню, отримаємо систему нерівностей

$$\left\|A^{-1}h\right\|_2 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} C_{ij}h_j\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|C_{ij}\|h_j| \le \alpha\sum_{i-1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|C_{ij}|, \tag{8.22}$$

$$\left\|A^{-1}RX\right\|_2 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij}r_{jk}X_k\right| \le \alpha\|X\|_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|C_{ij}|, \tag{8.23}$$

$$\left\|A^{-1}R\right\|_2 \le \alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|C_{ij}| \quad . \tag{8.24}$$

Замітимо, що дійсний або комплексний векторний простір U називається нормованим векторним простором, якщо для кожного вектора $a \in U$ існує таке дійсне число $\|a\|$ (норма, абсолютна величина, модуль вектора а), що із а = в слідує $\|a\| = \|b\|$ і що для всіх а і в із U:

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\|a\| \geq 0, \text{ із } \|a\| = 0$$

слідує, що а = 0,

$$\|\alpha a\| = |\alpha|\|a\|,$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

При α достатньо малому після підстановки правих частин цих нерівностей у другу із нерівностей (8.18), отримаємо

$$\|r\|_2 \leq \frac{\alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}| \left\{1 + \|X\|_2\right\}}{1 - \alpha \sum_{i-1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}|} \tag{8.25}$$

Сума $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}|$ служить якби мірою чутливості рішення до зміни вихідних даних системи.

Оцінимо тепер компоненти вектора r. Для цього векторне рівняння (8.10) представимо у вигляді системи рівнянь

$$r_i = \sum_{i=1}^{n} C_{ij} h_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ij} r_{jk} X_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ij} r_{ik} r_k . \tag{8.26}$$

(i = 1,2 …, n)

Звідси, при наявності умов

$$|r_{jk}| < \alpha, \quad |h_i| < \alpha \qquad \text{(j, k = 1,2, …., n)} \tag{8.27}$$

отримаємо

$$|r_i| \leq \alpha \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}| \left\{1 + \|X\|_2 + \|r\|_2\right\}. \tag{8.28}$$

Ця нерівність разом з (8.25) дає можливість оцінити невиявлену похибку кожної із компонент шуканого рішення.

В заключення вкажемо, що грубо приблизно похибки компонент вектора r можуть бути отримані із (8.26), якщо знехтувати сумою

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij} r_{ik} r_k ,$$

компоненти якої, природньо ждати, являються величинами більш високого порядку малості у порівнянні зі складовими перших двох сум.

При такому допущенні r_i дається формулою

$$r_i \approx \sum_{j=1}^{n} C_{ij} h_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij} r_{jk} x_k \text{ (i=1,2,....,n).} \qquad (8.29)$$

Наближеними формулами (8.29) можна користуватися також в тому випадку, коли $\|B\| > 1$. Характерно те, що ці формули зовсім не зв'язані з вибором норми.

Формули (8.17) – (8.29) дають можливість судити, наскільки чутливе рішення системи до малих змін коефіцієнтів матриці і вільних членів системи, а також у випадку необхідності корегувати рішення.

Лекція 9. Погано обумовлені системи.

Визначальною властивістю погано обумовленої системи являється її особливість, яка заключається в тому, що невеликі відмінності похибки в коефіцієнтах матриці системи приводять до великих відносних похибок в рішенні. Про величину відхилень в рішенні системи у залежності від відхилень у вихідних даних, як уже було сказано, можна судити по формулах (8.17 – 8.29) попередньої лекції.

Але більш чітке представлення про характер цієї залежності можна отримати із розгляду величини

$$\Omega = \frac{N(r)}{N(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}}, \qquad (9.1)$$

яка представляє собою як би осереднену відносну похибку рішення.

Якщо в якості норми матриці A взяти середнє квадратичн
елементів

$$N(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^2_{ij}}\ , \qquad (9.2)$$

а вказана величина задовільняє всім аксіомам норми, то для величини Ω буде мати місце нерівність

$$\Omega \le N(A)N(A^{-1})\Omega_1 \qquad (9.3)$$

де

$$\Omega = \frac{N(R)}{N(R)} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}^{\ 2}}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\ 2}} \qquad (9.4)$$

Насправді, вважаючи, що h = 0, із формули (8.9)

$$r + A^{-1}RX + A^{-1}Rr = A^{-1}h\ , \qquad (9.5)$$

нехтуючи складовою $A^{-1}Rr$, отримаємо

$$r = -A^{-1}RX\ . \qquad (9.6)$$

Звідки слідує

$$N(r) \le N(A^{-1})N(R)N(x)\ , \qquad (9.7)$$

або після очевидних перетворень

$$\frac{N(r)}{N(x)} \le N(A)N(A^{-1})\frac{N(R)}{N(A)}\ , \qquad (9.8)$$

що і доказує висказане твердження.

Нерівність (9.3) дає основу, в якості міри поганої обумовленості системи взяти величину

$$N(A)N(A^{-1}) \qquad (9.9)$$

або

$$N = \frac{1}{n}N(A)N(A^{-1})\ . \qquad (9.10)$$

Таке число N називають N – обумовлюючим числом матриці або відповідною їй системі. Розуміється, чим менше число N, тим краще обумовлена система.

Для пояснення сказаного розглянемо слідуючий приклад:

$$\begin{aligned} 1{,}4\,x + 0{,}9\,y &= 2{,}7 \\ -\,0{,}8\,x + 1{,}7\,y &= -\,1{,}2\,. \end{aligned} \qquad (9.11)$$

Якщо перше рівняння помножити на 0,01, результат прибавити до другого рівняння і після замість першого рівняння в (9.11) взяти отримане нове рівняння, то ми прийдемо до системи

$$\begin{aligned} -\,0{,}786x + 1{,}709\,y &= -\,1{,}173 \\ -\,0{,}800\,x + 1{,}700\,y &= -\,1{,}700 \end{aligned} \qquad (9.12)$$

еквівалентної системі (9.11). N – обумовлююче число системи (9.11) близьке до одиниці, а системи (9.12) – близьке до 114. І якщо представити, що при находженні коефіцієнтів системи (9.11) і (9.12) була допущена похибка приблизно одного і того ж порядку, то як слідує із формули (9.3), результат рішення системи, близький до (9.12), буде значно більше відрізнятися від точного рішення, ніж результат рішення системи близький до (9.11). Тому, система (9.12) являється погано обумовленою, у всякому випадку в порівнянні з системою (9.11).

Найкраще обумовленими матрицями, а відповідно і системами, являються ортогональні матриці, для яких N обумовлююче число дорівнює одиниці. При множенні всіх елементів матриці на одне і те ж число N – обумовлююче число не змінюється, але якщо помножити один стовпчик або строчку матриці на дуже мале, або дуже велике число, то N – обумовлююче число зростає.

Виявляється, що деякі види психологічних експериментів приводять до погано обумовлених систем. Так як погана обумовленість системи являється однією із головних причин низької точності результатів рішення систем, то у випадку поганої обумовленості переходять до еквівалентного перетворення таких систем з метою отримання кращої обумовленості.

Додатки

ДОДАТОК 1. Програма розрахунку визначника розмірами 3x3.
Для програмованого мікрокалькулятора
CITIZEN SRP – 350 SCIENTIFIC CALCULATOR

1.1 Призначення змінних

$$D = \begin{vmatrix} Q & T & W \\ R & U & X \\ S & V & Y \end{vmatrix}$$

1.2. Програма

№	оператори
1	Input Q, R, S, T, U, V, W, X, Y;
2	A = Q(UY-XV) + T(XS-RY) + W(RV-US);
3	Print “A = ”, F;
4	END

1.3. Контрольний приклад

$$D = \begin{vmatrix} 533{,}1862 & 188{,}218 & 68{,}26 \\ 188{,}218 & 68{,}26 & 25{,}6 \\ 68{,}26 & 25{,}6 & 10 \end{vmatrix} = 16{,}655688 .$$

1.4. Протокол №1 контрольного розрахунку

№	Введення даних	результат	Позна-чення	№	Введення даних	Результат	Позна-чення
1	533,1862E		Q	6	25,6E		V
2	188,218E		R	7	68,26E		W
3	68,26E		S	8	25,6E		X
4	188,218E		T	9	10E		Y
5	68,26E		U	10		16,655688	D

1.5. Коментарії

1. Натискуються клавіші ON, MODE.
2. Підводиться курсор під “3 PROG”.
3. Натискується клавіша ENTER.
4. Підводиться курсор під “2 RUN”.
5. Натискується клавіша ENTER.
6. Підводиться курсор під “P1” [KRAMER]
7. Натискується клавіша ENTER.
8. Послідовно набираються значення Q, R, S, T, U, V, W, X, Y.
9. Після кожного набору змінної натискується клавіша ENTER.
(Натиск даної клавіші позначений в протоколі буквою E).
10. Результат зчитується з екрану дисплея.

Додаток 2. Програма розрахунку визначника розмірами 4x4 CITIZEN SRP – 350 SCIENTIFIC CALCULATOR

2.1 Призначення змінних

$$D = \begin{vmatrix} A & E & I & M \\ B & F & J & N \\ C & G & K & O \\ D & H & L & P \end{vmatrix}.$$

2.2. До набору програми

№	Оператори	Коментарії
1	ON	Натиском клавіші ON включається мікропроцесор
2	MODE	Вибір режиму роботи
3	PROG	Курсор підводиться на режим програмування
4	ENTER	Пуск, фіксація режиму PROG
5	NEW	Підведення курсора до набору нової програми

Продовження набору програми

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

6	ENTER	Фіксація
7	MAIN	Підведення курсора до набору головної програми
8	ENTER	Фіксація
9	[KRAMER]	Набір назви програми
10	ENTER	Перехід до набору програми
11	INST	Доступ до режиму вибору програми
12	Input A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P;	
13	Z=(GL-KH)(AN-MB)+(GP-OH)(BI-AJ)+(CL-KD)(MF-EN)+(CH-GH)(IN-MJ);	
14	Z=Z+(KP-OL)(AF-BE)+(CP-OD)(EJ-IF);	
15	INST	Доступ до режиму вибору оператора
16	Print ,ENTER	Вивід результату на екран дисплея
17	‘Z=’ ,Z;	Значення D
18	END	Завершення програми

2.3. Контрольний приклад

Коефіцієнти нормальних рівнянь при побудові істинної моделі дослідження впливу ситуативної тривалості на характеристики пам’яті становили:

$$D=\begin{vmatrix} 10 & 25{,}6 & 68{,}26 & 188{,}218 \\ 25{,}6 & 68{,}26 & 188{,}218 & 533{,}1862 \\ 68{,}26 & 188{,}218 & 533{,}1862 & 1543{,}207 \\ 188{,}218 & 533{,}1862 & 1543{,}207 & 4543{,}4051 \end{vmatrix} = 2{,}68364489.$$

2.4 Протокол №2 контрольного розрахунку

№	Введення даних	Результат	позначення	№	Введення даних	Результат	Позначення
1	10 E		A	10	188,218 E		J
2	25,6 E		B	11	533,1862E		K
3	68,26 E		C	12	1543,207E		L
4	188,218E		D	13	188,218E		M
5	25,6 E		E	14	533,1862E		N
6	68,26 E		F	15	1543,207E		O

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Продовження протоколу №2 контрольного розрахунку

7	188,218E		G	16	543,4051E		P
8	533,1862E		H	17		2,68364489	D=7
9	68,26E		I				

2.5. Коментарії

1. Натискуються клавіші ON, MODE,ENTER.
2. Підводиться курсор під „2 RUN”, ENTER.
3. Підводиться курсор під „PO” [KRAMER], ENTER.
4. Послідовно набираються значення A, B, C,....., P.
5. Буквою E позначений натиск клавіші ENTER.
6. Результат зчитується з екрану дисплея.

ДОДАТОК 3. Розрахунок визначника в Microsoft Office Excel

На комп’ютері в редакторі Microsoft Office Excel необхідно перевірити на невиродженість матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь:

$$D = \begin{vmatrix} 4543,405126 & 1543,20706 & 533,1862 & 188,218 \\ 1543,20706 & 533,1862 & 188,218 & 68,26 \\ 533,1862 & 188,218 & 68,26 & 25,6 \\ 188,218 & 68,26 & 25,6 & 10 \end{vmatrix} = 2,669457023$$

.

Набирається визначник **D** матриці **[A]** в слідуючих клітинках

	A	B	C	D
1				
2	4543,405126	1543,405126	533,1862	188,218
3	1543,20706	533,1862	188,218	68,26
4	533,1862	188,218	68,26	25,6
5	188,218	68,26	25,6	10

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

В довільній клітинці записується формула розрахунку взначн

=МОПРЕД (А2 : D5) ENTER

Знак дорівнює необхідно ставити для того, щоб процесор налаштувався на роботу з числовим масивом. МОПРЕД набирається на російській мові.

Після відкривають дужку і на англійській мові задають крайній лівий і правий кути числового масиву (в нашому випадку A2:D5).

Як тільки ми задаємо розміри масиву, зразу ж синім кольором на дисплеї окреслиться даний числовий масив.

Дві крапки ставляться також з англійського шрифту.

Деякі студенти замість двокрапки ставлять крапку з комою і навіть тире, що призводить до спотворення результатів.

При наборі визначника необхідно цілі числа відділяти комою із числового ряду. Помилкою студентів є виділення цілих чисел від їх долей комою із буквенного ряду. При цьому ком'ютер не може працювати з таким масивом.

В нашому випадку отримали

D = 2,669457023

ДОДАТОК 4. РОЗРАХУНОК ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ в Microsoft Office Excel

1. Набирається матриця **А** в клітинках A2 - D5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	4543,405	1543,207	533,1862	188,218		6,210224	-45,4271	107,6096	-82,2829	
3	1543,207	533,1862	188,218	68,26		-45,4271	333,9294	-795,241	611,433-	
4	533,1862	188,218	68,26	25,6		107,6096	-795,241	1905,011	1473,92	
5	188,218	68,26	25,6	10		-82.2829	611,4333	1473,92	1148,408	
6										

2.Виділяється діапазон для оберненої матриці того ж розміру,починаючи з клітинки, у якій буде записана формула (F2:I5).

3.В крайній лівій клітинці набирається формула

=МОБР (А2 : D5).

3. Натискаються клавіші F2, Ctrl + Shift + Enter

Примітка.

1. Формула починається із знака дорівнює „=”.
2. На російській мові набирається МОБР.
3. Переходять на англійську мову і набирають діапазон матриці буквами англійської мови.
4. Двокрапкою відділяються крайній верхній кут першого елементу матриці і крайні нижній правий кут, в якому находиться останній елемент.
5. Цілі числа виділяються комою з числового ряду. При відділенні цілих чисел комою з буквеного ряду процесор не читає числовий масив.
6. При виділенні діапазону масиву не двокрапками, а тире або крапкою з комою дані будуть спотворені.

ДОДАТОК 5. Рішення лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці в Excel.

1. Поряд з оберненою матрицею набирається вектор вільних членів

		F	G	H	I	J	K	L	M
1									
2		6,210224	-45,4271	107,6096	-82,2829		1492,237		-4,56875
3		-45,4271	333,9294	-795,241	611,433		582,81		32,63684
4		107,6096	-795,241	1905,011	-1473,92		237,1		-83,1716
5		-82,2829	611,433	1148,408	1148,408		101		86,23255
6									

2. Виділяється масив для знайдених значень, починаючи з клітинки M2, де записують формулу (M2:M5).

3. Записується формула множення матриць в клітинці (M2)

= МУМНОЖ (F2 : I5 ; K2 : K5)

4. Натискують клавіші F2 ,Ctrl + Shift + Enter.

5. Отримують значення невідомих в діапазоні M2 : M5.

ДОДАТОК 6. Генерування випадкових чисел на CITIZEN SRP – 350

2 nd	**Fix**	**2**	**ENTER**	**MATH**	**2Rand**	**ENTER**
Rand	**ENTER**	**0.93**	**ENTER**	……….		

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Література

1. Блаттнер, Патрик. Использование Microsoft Office Excel 2003. – М. : Издательский дом „Вильямс”, 2005, - 864 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.- М. Наука, 1980, - 176 с.
3. Гаральд Крамер. Математические методы статистики. – М. : Мир, 1975, - 648 с.
4. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. – М. : Наука, 1975, - 160 с.
5. Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження впливу ситуативної тривожності на характеристики пам’яті. Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету. Частина 2, - МЕГУ, Рівне, 2006, - 27 с.
6. Літнарович Р.М. Дослідження точності апроксимації результатів психолого – педагогічного експерименту методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. Побудова істинної моделі. МЕГУ, Рівне, 2006, -46 с.
7. Літнарович Р. М. Лінійна алгебра. Елементи теорії визначників. Курс лекцій. МЕГУ, Рівне, 2006, – 72с.
8. Математика: Підручник.\ О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – 2 – ге вид., стереот. - К. : Вища шк., 2002, - 447 с.
9. Соколенко О.І. Вища математика . Підручник, К.: Академія, 2003, - 432 с.
10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии.- Москва – Ленинград, изд-во технико-теоретической литературы, 1952, - 356 с.
11. Уокенбах, Джон. Excel 2003. Библия пользователя. - М. : Издательский дом «Вильямс», 2005, - 768 с.

Покажчик понять, термінів та визначень

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

ЛІТНАРОВИЧ РУСЛАН МИКОЛАЙОВИЧ
доцент, кандидат технічних наук

Алгебра матриць

Курс лекцій

Навчальне видання

Комп'ютерний набір, верстка, дизайн у редакторі Microsoft® Office® Word Дем'янчук Галина Михайлівна, Дзюбак Альона Анатоліївна, Лавренчук Катерина Петрівна.

МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. акад. С. Дем'янчука
Кафедра математичного моделювання
33027, м. Рівне, вул.. акад. С. Дем'янчука, 4.